

МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Артамонов Д.В., Семёнов А. Д.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(учебное пособие)

2003

УДК 66-52

Артамонов Д.В., Семёнов А. Д. Основы теории линейных систем автоматического управления: Учебн. пособие. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003.- 135 с. : ил. 47, табл. - , библиогр. 11 назв.

Рассматриваются основные методы автоматического управления с использованием математического описания этих систем в пространстве состояний, а также структурированные модели систем управления, передаточные функции, структурные схемы, временные и частотные характеристики. Изложены вопросы наблюдаемости, управляемости и устойчивости одномерных и многомерных систем управления, удовлетворяющих различным критериям качества. Рассматриваются методы анализа и синтеза линейных систем.

Учебное пособие написано в соответствии с программами курсов “ Математические основы теории управления” и “ Теория управления”.

Рис. 43                      Табл. -

Рецензенты:

## Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	
1.1. Математические модели объектов управления в обычных и частных производных .....	10
1.2. Линеаризация нелинейных моделей объектов управления .....	14
1.3. Различные формы представления линейных математических моделей .....	18
1.4. Структурированные модели и передаточные функции систем управления .....	24
1.5. Динамические звенья и структурные схемы систем управления. Правила преобразования структурных схем .....	26
1.6. Временные характеристики .....	36
1.7. Частотные характеристики .....	39
2. МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ	
2.1. Понятие пространства состояний .....	46
2.2. Понятие матрицы передаточной функции, матриц временных и час- тотных характеристик .....	48
2.3. Основные свойства конечномерного векторного пространства .....	52
2.4. Линейные преобразования в пространстве состояний .....	55
2.5. Понятие наблюдаемости многомерной системы .....	63
2.6. Понятие управляемости многомерных систем .....	67
3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	
3.1. Устойчивость систем в пространстве состояний. Первая теорема Ляпунова .....	70
3.2. Устойчивость линейных систем.	

Алгебраические критерии устойчивости .....	73
3.3. Частотные критерии .....	77
3.4. Особые точки и особые линии фазовых траекторий систем в пространстве состояний .....	86
3.5. Понятие абсолютной устойчивости. Прямой метод Ляпунова .....	92
<b>4. КАЧЕСТВО СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ</b>	
4.1. Критерии качества .....	97
4.2. Временные показатели качества .....	99
4.3. Корневые критерии качества .....	101
4.4. Частотные показатели качества .....	104
4.5. Интегральные критерии .....	109
<b>5. СИНТЕЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ</b>	
5.1. Понятия закона регулирования и управления .....	112
5.2. Основные законы регулирования .....	114
5.3. Синтез систем методом последовательной коррекции с подчиненным регулированием координат .....	120
5.4. Синтез регуляторов при модальном управлении .....	127
5.5. Аналитическое конструирование регуляторов .....	132
<b>ЛИТЕРАТУРА</b> .....	135

## ВВЕДЕНИЕ

### В.1. Основные понятия, определения и задачи теории автоматического управления

Управление - это совокупность действий, осуществляемых на основе определения информации и направляемых на поддержание или улучшение функционирования объекта в соответствии с имеющейся программой (алгоритмом) или целью управления.

Автоматическое управление - управление, осуществляемое без участия человека.

В соответствии с введенным определением управление можно рассматривать как целенаправленный процесс, протекающий в пространстве и времени и развивающийся в некоторой организованной материальной среде.

Для реализации процесса управления необходимо физическое устройство (объект управления), состояние которого можно изменять путем приложения внешних воздействий и контролировать изменение состояния с помощью информационных устройств (датчиков). Также необходимо иметь цель управления, сформулированную на основе определенных понятий о природе управляемых процессов протекающих в объекте управления (ОУ) и отношений между внешними воздействиями и параметрами этих процессов.

Управляемые процессы, протекающие в ОУ, могут иметь различную физическую природу (механические, электрические, химические, биологические, экономические и т.п.). В зависимости от физической природы управляемых процессов различными будут и цели управления. Например, для механических процессов целью управления может быть получение высокого быстродействия, для электрических - управление с минимальными затратами энергии, для химических -

получение максимального количества продукта с единицы объема, для экономических - получение максимальной прибыли.

Для поддержания нормального протекания управляемых процессов при одновременном достижении цели управления к объекту управления подключается устройство управления (УУ). Основное назначение УУ - выработка управляющих воздействий на ОУ в соответствии с целью управления и его текущим состоянием, определяемым с помощью информационных устройств (датчиков).

Совокупность устройства управления и объекта, обеспечивающих автоматическое управление, называется системой автоматического управления.

Таким образом, управление обеспечивает целенаправленное приспособление системы управления к внешним воздействиям. Независимо от физического характера системы управления, процессы управления протекающие в ней подчиняются некоторым общим закономерностям и характеризуются сходными явлениями. Эти закономерности и явления изучает кибернетика - наука об управлении динамическими системами.

Кибернетика состоит из двух греческих слов "кибер" - над и "натиус" - моряк. Буквально "кибернатиус" - старший над моряками.

Впервые слово кибернетика было употреблено русским ученым Богдановым, который рассматривал эту науку применительно к управлению человеческим обществом.

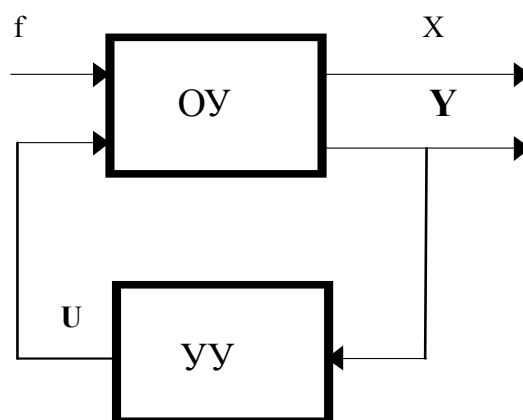
В 1948 году Н. Винер в своей книге "Кибернетика или управление и связь в животном и машине" придал этому термину современное понятие.

Кибернетику определяют также как науку о способах восприятия, передачи, хранения, переработки и использования информации.

Современная кибернетика состоит из ряда разделов представляющих собой самостоятельные научные направления. Теоретическое ядро кибернетики составляют теория информации, теория алгоритмов, теория автоматов, исследование операций, теория автоматического управления, теория распознавания образов.

Управлением техническими системами занимается техническая кибернетика, которая включает в себя теорию автоматического управления, теорию оптимальных систем, адаптивных и обучающих систем, теорию надежности. Главная задача технической кибернетики – синтез технических систем управления, обеспечивающих достижение требуемых показателей качества, характеризующих их функционирование. Основным математическим аппаратом технической кибернетики: теория дифференциальных уравнений, функциональный анализ, вариационное исчисление, математическое программирование, математическая логика, теория графов, теория вероятностей.

Структура системы управления выглядит следующим образом.



На рисунке приняты следующие обозначения:  $U$  - независимые переменные (управляющие координаты или величины), вырабатываемые устройством управления (УУ);  $X$  - зависимые переменные (обобщенные или фазовые координаты), которые однозначно характеризуют состояние управляемого процесса в любой момент времени;  $Y$  – вторичные, измеряемые переменные (управляемые координаты), которые в процессе управления измеряются и используются для оценки качества функционирования системы управления;  $f$  - внешние неконтролируемые переменные (возмущающие воздействия), отклоняющие  $Y$  от заданных значений.

В структурной схеме реализуется фундаментальный принцип управления - принцип обратной связи, когда информация с выхода объекта после соответствующей обработки в устройстве управления поступает на его вход. Причем

управляющие воздействия, подаваемые на вход объекта, вычисляются таким образом, чтобы обеспечить достижения заданной цели управления и скомпенсировать неблагоприятные изменения управляемых координат  $Y$  при неконтролируемом действии внешних возмущений  $f$ .

Функциональная зависимость, устанавливающая взаимосвязь между регулируемыми и регулирующими координатами объекта, называется законом управления. Закон управления может быть записан в виде

$$U = F(Y). \quad (B.1)$$

Используемые в настоящее время в качестве УУ микропроцессоры и микроЭВМ позволяют легко реализовать самые разнообразные виды законов управления как функции  $U = F(Y)$ , добиваясь желаемого характера управляемых процессов, протекающих в ОУ, не внося в него каких-либо конструктивных или технологических изменений.

Выбор конкретного закона управления будет определяться свойствами и характеристиками ОУ, целью управления и ограничениями накладываемыми на координаты объекта.

Экспериментально определяемые характеристики ОУ и теоретические исследования особенностей, управляемых процессов, протекающих в нем, позволяют создавать математические модели объектов управления в виде системы дифференциальных уравнений с обычными и частными производными от его обобщенных (фазовых) координат.

$$D\Phi(X, U, f, a, I, t) = \Psi(I, t), \quad (B.2)$$

где  $D$  - символ дифференцирования функции  $\Phi$  по пространственной координате  $I$  и времени  $t$ ;  $a$  - параметры модели.

Как правило, цель управления задается в виде целевой функции  $I(X, U)$  от управляемых и обобщенных координат объекта

$$I = I(Y, U). \quad (B.3)$$

Ограничения на координаты объекта задаются в виде неравенств



$$|\mathbf{X}| \leq \mathbf{X}_m; \quad |\mathbf{Y}| \leq \mathbf{Y}_m; \quad |U| \leq U_m. \quad (\text{B.4})$$

Если в процессе управления для целевой функции  $\mathbf{I}(\mathbf{X}, U)$  обеспечивается экстремум, то управление в этом случае называют оптимальным, а систему управления оптимальной. В том случае если  $\mathbf{I}(\mathbf{X}, U)$  зависит от времени, или остается постоянной не достигая экстремума, то управления называют программным или стабилизирующим.

Если в качестве целевой функции используют управляемые координаты  $\mathbf{Y}$ , т.е.  $I = \mathbf{I}(\mathbf{Y})$ , то имеет место автоматическое регулирование, а не управление. Автоматическое регулирование является частным случаем автоматического управления.

В зависимости от конкретного вида выражений (B.1) - (B.3) можно выделить следующие основные классы систем автоматического управления.

Наиболее важным классификационным признаком систем управления является математическое описание их поведения, задаваемое с помощью выражения (B.2). По этому признаку все системы делятся на:

-системы с распределенными координатами. Описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, размерность вектора фазовых координат  $\mathbf{X}$  бесконечна;

-системы с сосредоточенными параметрами. Описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, размерность вектора фазовых координат  $\mathbf{X}$  конечна. Если  $\mathbf{Y}$  вектор, то имеем многомерную систему, если  $Y$  - скаляр - одномерную;

-нелинейные системы. Описываются нелинейными дифференциальными уравнениями (обыкновенными и в частных производных);

-линейные системы. Описываются линейными дифференциальными уравнениями (обыкновенными и в частных производных);

-непрерывные системы. Описываются дифференциальными уравнениями, решения которых являются непрерывными функциями времени;

-дискретные системы (импульсные и цифровые). Описываются разностными уравнениями, решение которых - дискретные функции времени.

Вторым по важности признаком классификации является принцип управления. По этому признаку различают:

-системы с обратной связью, или системы, реализующие принцип управления по отклонению. В таких системах регулирующая величина  $U$  является некоторой функцией от ошибки системы, определяемой как отклонение вектора регулируемых координат  $Y$  от заданного значения  $q$ ;

-системы с компенсацией возмущений, или системы, реализующие принцип управления по возмущению. В таких системах регулирующая величина  $U$  является функцией от каких-либо компонент вектора возмущающих воздействий  $f$ , причем вид функциональной зависимости  $U = F(f)$  определяется из условия частичной или полной компенсации действующих возмущений  $f$  на регулируемую величину  $Y$ ;

-комбинированные системы управления, в которых одновременно реализуются принципы управления по отклонению и возмущению.

Третьим классификационным признаком является вид закона управления (В.1). По этому признаку различают:

-системы с линейными законами управления (регулирования), когда управляющее воздействие  $U$  является линейной комбинацией от регулируемых величин  $Y$ , а также их производных и интегралов;

- системы с нелинейными законами управления;

- системы экстремального и оптимального управления, обеспечивающие экстремум (максимум или минимум) целевой функции (В.2);

- системы адаптивного управления, изменяющие параметры закона управления (самоадаптирующиеся системы), или сам закон (самоорганизующиеся системы) в зависимости от изменения параметров объекта управления.

Четвертым классификационным признаком является характер цели управления (В.2), в соответствии с которым все системы делятся на:

- системы стабилизации, у которых целевая функция постоянна

$$I(Y, U) = const;$$

- системы программного управления, у которых целевая функция зависит от времени

$$I(Y, U) = f(t);$$

- системы оптимального управления, у которых целевая функция в процессе управления достигает экстремума

$$I(Y, U) = \min(\max).$$

Основными задачами теории автоматического управления являются задачи анализа и синтеза систем управления.

В задаче синтеза требуется найти закон управления удовлетворяющий условиям (В.1) при заданных характеристиках и параметрах ОУ.

В задаче анализа необходимо по заданному закону управления и параметрам ОУ проверить выполнение условия (В.1).

Решение этих задач в рамках современной теории автоматического управления включает в себя:

- получение математических моделей объекта управления в пространстве состояний или в виде моделей вход-выход;

- оценивание и идентификацию параметров математических моделей;

- оценку наблюдаемости, управляемости, идентифицируемости и адаптируемости объекта управления;

- применение методов оптимального и адаптивного управления для нахождения закона управления;

- проверку устойчивости системы автоматического управления;
- определение качества процессов управления в соответствии с выбранной целевой функцией.

# 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

## 1.1. Математические модели объектов управления в обыкновенных и частных производных

Математическая модель это математическое описание координат, параметров и функций, отображающих существенные свойства объекта, процесса или явления. Математическая модель объекта управления является основой для анализа и синтеза систем управления. В теории управления исследуются и рассматриваются не реальные системы, а их математические модели, поэтому результаты проводимых исследований и расчетов лишь приблизительно отражают свойства реальных систем. Чем точнее математическая модель отражает свойства реальной системы, тем точнее результаты проводимых расчетов.

Для получения математической модели системы управления необходимо дополнить уравнения объекта уравнениями исполнительных устройств, устройств измерения и устройства управления.

Очевидно, что без нарушения общности рассуждений исполнительные устройства и устройства измерения можно отнести к объекту управления, расширив размерность его вектора обобщенных координат. Такой объект, включающий в себя исполнительные и измерительные устройства, будем называть обобщенным объектом.

В наиболее общем случае управляемый процесс, протекающий в ОУ, может быть описан дифференциальными уравнениями в частных производных

$$L\Phi(l, t) = f(l, t), \quad (l \in L, t > 0) \quad (1.1)$$

при начальных условиях:

$$\Lambda_j \Phi(l, 0) = \beta(l), \quad (j = 1, 2, \dots, n, l \in L) \quad (1.2)$$

и краевых условия условиях:

$$B_i \Phi(l, t) = b_i(l, t), \quad (i = 1, 2, \dots, m, l \in L, t > 0), \quad (1.3)$$

где  $l$  - пространственная координата;  $m$  - число управляющих величин;  $n$  - число управляемых величин.

Ограничимся рассмотрением случая, когда  $L$  является волновым оператором или оператором переноса, что соответствует исследованию динамических процессов распространения возмущений и свободных движений. Кроме этого, выбор такого оператора позволяет рассматривать достаточно широкий класс физических процессов теплопроводности, диффузии, переноса, газо-гидродинамики, колебаний и сводится к решению смешанных задач математической физики для уравнений гиперболического и параболического типа вида:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(l) \frac{\partial^2 x}{\partial l_i \partial l_j} + \sum_{i=1}^n b_i(l) \frac{\partial x}{\partial l_i} + c(l)x = U(l,t). \quad (1.4)$$

Рассмотрим основные физические процессы, сводящиеся к уравнению (1.4)

1. Уравнения колебаний. Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран, трехмерных объектов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний :

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} x) + qx = U(l,t). \quad (1.5)$$

Неизвестная функция  $x(l,t)$  (координата процесса), зависящая от  $n$  ( $n=1,2,3$ ) пространственных координат  $l_1, l_2, l_3$  и времени  $t$ , коэффициенты  $\rho, p, q$  определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс, свободный член  $U(l,t)$  выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (1.5) в соответствии с определением операторов  $\operatorname{div}$  и  $\operatorname{grad}$

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial l_i} \left( p \frac{\partial x}{\partial l_i} \right). \quad (1.6)$$

Для однозначного описания процесса колебаний необходимо дополнительно задать величину  $x(l,0)$  в начальный момент времени (начальные условия) и

режим поведения  $x(l_0, t)$  на границе среды, где развивается физический процесс (граничные условия)

В задачах механики  $x(l, t)$  отклонения точки материального тела с координатами  $l_1, l_2, l_3$  от положения равновесия, в задачах электродинамики  $x(l, t)$  напряженность электрического или магнитного поля в точке пространства с координатами  $l_1, l_2, l_3$ .

2. Уравнение диффузии. Процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде описываются следующим уравнением диффузии.

$$\rho \frac{\partial x}{\partial t} - \operatorname{div}(p \operatorname{grad} x) + qx = U(l, t). \quad (1.7)$$

Неизвестная функция  $x(l, t)$  в этом случае является температурой или концентрацией вещества.  $U(l, t)$  - интенсивность источников тепла или вещества.

Как и в случае уравнения колебаний для полного описания процесса необходимо задать начальное распределение  $x(l, 0)$  (начальные условия) и режимы на границе среды  $x(l_0, t)$  (граничные условия).

3. Уравнения газо-гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) &= f(l, t); \\ \frac{\partial V}{\partial t} + (V, \operatorname{grad} V) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}(p) &= U(l, t), \end{aligned} \quad (1.8)$$

здесь  $V(l, t)$  - вектор скорости движения жидкости или газа,  $\rho(l, t)$  - плотность,  $p(l, t)$  - давление,  $f(l, t)$  - интенсивность источников,  $U(l, t)$  - интенсивность массовых сил.

Первое (уравнение неразрывности) и второе уравнение (уравнение Эйлера) дополняются уравнением состояния, учитывающим связь между давлением и плотностью.

Отметим, что для объектов с распределенными координатами, описываемыми уравнениями в частных производных, координаты физического управляемого процесса  $x(l, t)$  и внешние воздействия  $U(l, t)$  непрерывно изменяются во времени и пространстве. На практике контроль координат управляемого процесса и внесение управляющих воздействий осуществляется в отдельных точках пространства. В связи с этим, в задачах автоматического управления, для математического описания ОУ переходят к уравнениям в обыкновенных производных.

Формально такой переход можно осуществить заменой частных производных на обыкновенные в уравнениях (1.5), (1.7), (1.8) и введением некоторой интегральной характеристики учитывающей свойства и параметры среды.

$$F(x) = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} x),$$

Учитывая конечную скорость распространения возмущений в пространственной среде, где протекает управляемый процесс, а также то обстоятельство, что точка приложения управляющего воздействия и точка контроля координат процесса находятся в разных областях пространства, изменение  $x(l_1, t)$  под действием  $U(l_2, t)$  будет происходить не мгновенно, а с некоторым запаздыванием. Время этого запаздывания  $\tau$  можно вычислить как отношение расстояния между точками приложения управляющего воздействия и контроля к скорости распространения возмущений  $v$

$$\tau = \frac{l_1 - l_2}{v}.$$

С учетом вышеизложенного, уравнения (1.5), (1.7), (1.8) могут быть преобразованы к виду:

### 1. Уравнения колебаний

$$\rho \frac{d^2 x}{dt^2} + qx + F(x) = U(t - \tau). \quad (1.9)$$

### 2. Уравнения теплопроводности и диффузии



$$\rho \frac{dx}{dt} + qx + F(x) = U(t - \tau). \quad (1.10)$$

### 3. Уравнения газо-гидродинамики

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + F_1(\rho, V) &= f(t - \tau); \\ \frac{dV}{dt} &= F_2(V) + F_3(\rho) = U(t - \tau). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Эти уравнения являются нелинейными неоднородными уравнениями в обычных производных.

## 1.2. Линеаризация нелинейных моделей объектов управления

Следует иметь в виду, что, говоря о линеаризации нелинейных моделей объектов регулирования, фактически осуществляют линеаризацию нелинейных дифференциальных или алгебраических уравнений которыми описывается объект.

Поскольку подавляющее большинство объектов управления являются нелинейными системами, то одной из задач теории линейных систем является задача линеаризации исходных нелинейных уравнений объекта управления и определение границ применения методов исследования линейных систем.

Стремление линеаризовать нелинейные системы, вызвано особыми свойствами линейных систем, позволяющими в значительной степени облегчить их анализ.

К таким свойствам относятся:

- свойство суперпозиции,

если  $y = f(x)$  - есть линейная функция, то

$$y(x_1) + y(x_2) = f(x_1) + x_2)$$

для любых  $x_1, x_2$

- свойство однородности на изменение масштаба входной переменной.

Если  $y = f(x)$  - линейная зависимость, то

$$y = f(ax) = af(x)$$

для любых действительных  $a$ .

Поведение физической конечномерной системы описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в форме Коши.

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t)]. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) в обобщенном виде описывает динамические свойства объекта управления, задаваемые уравнениями (1.5), (1.7), (1.8), когда обобщенные координаты  $\mathbf{X}$  и возмущения  $\mathbf{U}$  являются векторами и зависят от времени. Если рассматривать установившиеся состояния, при которых обобщенные координаты не зависят от времени, то система (1.12) преобразуется к виду:

$$F(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0. \quad (1.13)$$

Такая система является системой алгебраических уравнений и характеризует особенности работы объекта в статике, т.е. функциональные зависимости между  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{U}$  для их установившихся значений. Уравнение (1.13), разрешенное относительно  $\mathbf{X}$ , называется статической характеристикой объекта и записывается в виде:

$$\mathbf{X} = \varphi(\mathbf{U}). \quad (1.14)$$

Нетрудно убедиться, что система алгебраических уравнений (1.13) является частным случаем системы дифференциальных уравнений (1.12), при условии, что все производные по времени равны нулю.

Непосредственное исследование поведения объекта управления или физической системы по уравнению (1.12) представляет собой сложную вычислительную задачу сводящуюся к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений.

Для упрощения решения этой задачи ищут ее приближенное решение в предположении, что  $F(\mathbf{X}, \mathbf{U})$  есть линейная функция по  $\mathbf{X}$ . Следовательно, точность приближенного решения уравнения (1.12) будет определяться погрешностями линеаризации (1.14).

Из курса математики известно, что линеаризация нелинейности вида:  $F(\mathbf{X}, \mathbf{U})$  или  $\mathbf{X} = f(\mathbf{U})$  осуществляется в окрестностях какой-либо точки  $\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0$  удовлетворяющей уравнению (1.14).

Обычно в качестве такой точки выбирается точка статической характеристики объекта, соответствующая номинальным значениям  $\mathbf{U}_0$ .

Для заданных  $\mathbf{U}_0$  путем решения системы алгебраических уравнений (1.14) находят  $\mathbf{X}_0$ . Затем в окрестностях этой точки осуществляют линеаризацию нелинейной зависимости  $F(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0$ . Либо методом малых отклонений, либо методом линеаризации в среднем.

Первый метод основан на разложении функции  $\mathbf{X} = f(\mathbf{U})$  в ряд Тейлора в окрестностях точки  $\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0$ , с последующим отбрасыванием членов разложения выше второго порядка. Линеаризованное уравнение (1.13) запишется в виде:

$$J(\Delta\mathbf{X} + \Delta\mathbf{U}) = 0, \quad (1.15)$$

где  $J$  - функциональная матрица или якобиан функции  $F(\mathbf{X}, \mathbf{U})$  в точке  $\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0$ ;  $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ ;  $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0$  - малые приращения векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{U}$ .

Подставляя (1.15) в (1.12) и учитывая, что  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d\Delta\mathbf{X}}{dt}$  получим линеаризованную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\Delta\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{U}, \quad (1.16)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  квадратная и прямоугольная матрицы, определяемые свойствами якобиана функции  $F(\mathbf{X}, \mathbf{U})$  и размерностью векторов  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{U}$ .

Область применения такого метода линеаризации ограничена малыми отклонениями переменных  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{U}$  от установившихся значений и условиями существования якобиана функции  $F(\mathbf{X}, \mathbf{U})$ , для чего необходимо условие дифференцируемости этой функции.

В том случае, если последнее условие не выполняется, т.е. функция  $F(\mathbf{X}, \mathbf{U})$  имеет точки разрыва второго рода, используют метод линеаризации в среднем.

Сущность этого метода заключается в аппроксимации нелинейной функции линейной зависимостью в заданном диапазоне изменения обобщенных координат  $\mathbf{X}$ . В качестве метода аппроксимации обычно используют метод наименьших квадратов. Линеаризованная система имеет вид (1.16), однако вычисление коэффициентов матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  осуществляется по методу наименьших квадратов.

В соответствии с этим методом вводят вспомогательную функцию  $\Phi$ , определяемую как квадрат разности заданной нелинейной функции  $X = f(U)$  и линейной зависимости  $X = kU + b$  на интервале  $[U_1, U_2]$

$$\Phi(k, b) = \int_{U_1}^{U_2} (f(U) - kU - b)^2 dU.$$

Функция зависит только от неизвестных коэффициентов  $k$  и  $b$ .

Минимизируя  $\Phi$  по неизвестным коэффициентам  $k$  и  $b$  можно найти их конкретные значения из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0.$$

В качестве примера линеаризуем участок параболы  $X = U^2$  на интервале  $U$  от 0 до 1.

Вычислим функцию  $\Phi$

$$\Phi = \int_0^1 (U^2 - kU - b)^2 dU = b^2 + kb + \frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}k + \frac{1}{5}.$$

Найдем частные производные и приравняем их нулю.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k} = b + \frac{2}{3}k - \frac{1}{2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 2b + k - \frac{2}{3} = 0.$$

Откуда получим  $b = -\frac{1}{6} \quad ; \quad k = 1$ .

Если провести линеаризацию уравнения параболы методом малых отклонений, путем разложения уравнения параболы в ряд Тейлора в окрестностях точки с координатами  $[U_0, f(U_0)]$ , то можно записать:

$$f(U) = \sum_{i=0}^n \frac{f^i(U_0)}{i!} (U - U_0)^i + R_n(U).$$

Ограничиваясь линейными членами ряда и задавая координаты точки разложения  $[0,5; 0,25]$  получим:

$$f(U) = f(0,5) + (U - 0,5) = U - \frac{1}{4}.$$

Откуда  $b = -\frac{1}{4}; k = 1$ .

### 1.3. Различные формы представления линейных математических моделей

Математическая модель системы управления является основой для анализа и синтеза систем. Поэтому в зависимости от особенностей исследуемой системы и характера решаемых задач используют различные формы представления математических моделей систем управления.

Наиболее широко используются два вида математического описания систем, или два вида математических моделей - это математические модели систем в

пространстве состояний и математические модели “вход - выход” или структурированные модели.

В первом случае все переменные системы представляются в виде пространственных векторов, и поведение системы рассматривается в евклидовых пространствах управляющих, управляемых и возмущающих переменных, а также в пространстве состояний внутренних переменных или просто в пространстве состояний.

Как правило, не все обобщенные координаты объекта  $X$  используются для формирования управляющих воздействий, поэтому в рассмотрение вводится вектор управляемых или регулируемых величин объекта  $Y$ , размерность которого меньше или равна размерности вектора  $X$ .

Функциональная взаимосвязь между  $Y$  и  $X$  линейных и линеаризованных объектов задается выражением:

$$Y = CX, \quad (1.17)$$

где  $C$  - квадратная или прямоугольная матрица.

Выражение (1.17) показывает, что любая регулируемая величина  $Y$  является линейной комбинацией от обобщенных координат объекта  $X$ .

$$Y_j = \sum_{i=1}^n C_{ij} X_i.$$

Для получения полной математической модели системы управления необходимо ввести уравнения, описывающие поведение устройства управления. Для линейных систем такое управление задается в виде

$$\begin{aligned} U &= -LX; \\ U &= -MY, \end{aligned} \quad (1.18)$$

$L$ ,  $M$  - прямоугольные или квадратные матрицы управления.

Уравнение (1.18) реализует фундаментальный принцип управления - принцип обратной связи. Причем знак минус перед правой частью уравнений (1.18) указывает, что обратная связь является отрицательной, и управляющий

сигнал всегда стремится вернуть систему к ее установившемуся состоянию, из которого она выходит под действием возмущений.

В технике впервые принцип обратной связи был использован в регуляторах Ползунова И.И. и Уатта Д.

Объединяя в единую систему уравнений выражения (1.16), (1.17) и (1.18), получим математическую модель системы управления, описывающую ее свойства в пространстве состояний

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} + \mathbf{E}\mathbf{f}; \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}; \\ \mathbf{U} = -\mathbf{L}\mathbf{X}. \end{cases} \quad (1.19)$$

Исключая и третье уравнение из системы, получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{L})\mathbf{X} + \mathbf{E}\mathbf{f}; \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Отсюда следует, что математическая модель системы управления представляет собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, записанных в форме Коши.

Наряду с математическими моделями в пространстве состояний широко используются математические модели “вход-выход” у которых вместо обобщенных координат вводятся входная  $U$  (управляющая) и выходная  $Y$  (управляемая) координаты.

Такие математические модели целесообразно использовать для одномерных систем, когда  $U$  и  $Y$  являются скалярами. В этом случае дифференциальное уравнение, связывающее выходную и входную переменные, будет выглядеть:

$$a_0 \frac{d^n Y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} Y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dY}{dt} + a_n Y = b_0 \frac{d^m U}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} U}{dt^{m-1}} + \dots + b_m U, \quad (1.21)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m$  - постоянные коэффициенты;  $n$  - порядок системы.

Для реальных физически реализуемых систем управления  $m < n$ .

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение  $n$ -ого порядка (1.21) эквивалентно системе  $n$  линейных уравнений первого порядка (1.20). Для того чтобы установить правила перехода от (1.19) к (1.21) примем в (1.20)  $X_n = Y; f_1 = f_2 = \dots = f_k = 0$  и ограничимся рассмотрением системы второго порядка без учета третьего уравнения системы (1.19).

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= a_{11}X_1 + a_{12}Y + b_{11}U; \\ \frac{dY}{dt} &= a_{21}X_1 + a_{22}Y + b_{21}U. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Продифференцируем второе уравнение (1.22)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a_{21} \frac{dX_1}{dt} + a_{22} \frac{dY}{dt} + b_{21} \frac{dU}{dt}.$$

Подставим сюда  $\frac{dX_1}{dt}$  из первого уравнения системы (1.22). После преобразований получим:

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} - a_{22} \frac{dY}{dt} - a_{21}a_{12}Y = a_{21}a_{11}X_1 + a_{21}b_{11}U + b_{21} \frac{dU}{dt}. \quad (1.23)$$

Выразим  $X_1$  из второго уравнения системы (1.22) и подставим его в (1.23). Окончательно будем иметь линейные неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dY}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})Y = b_{21} \frac{dU}{dt} + (a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})U. \quad (1.24)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных, получим соотношения между коэффициентами уравнений (1.21) и (1.24)



$$\begin{aligned}
 a_0 &= 1; & a_1 &= -(a_{11} + a_{22}); & a_2 &= (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}); \\
 b_0 &= b_{21}; & b_1 &= a_{21} \cdot b_{11} - a_{11} \cdot b_{21}.
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

Выражения (1.25) позволяют установить, что обратный переход от (1.21) к (1.19) неоднозначен, так как часть коэффициентов матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  можно выбирать произвольно.

Исследование системы (1.19) или уравнения (1.21) сводится, в первую очередь, к их решению или к задаче Коши. Решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений рассматриваются в специальных курсах математики, поэтому приведем здесь лишь основные методы решения.

Общее решение линейных неоднородных уравнений (1.19) - (1.21) равно сумме общего решения  $\mathbf{X}_{CB}(t)$  соответствующего однородного уравнения и частного решения  $\mathbf{X}_B(t)$  неоднородного уравнения

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_{CB}(t) + \mathbf{X}_B(t) \tag{1.26}$$

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами записывается в виде

$$X_{jCB}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{P_i t}, \tag{1.27}$$

где  $C_i$  - постоянные интегрирования,  $P_i$  - корни характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение получается путем приравнивания нулю определителя, получаемого из матриц  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{BL}$  системы уравнений (1.19), (1.20), следующим образом:

$$\begin{vmatrix}
 d_{11} - p & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n} \\
 d_{21} & d_{22} - p & d_{23} & \dots & d_{2n} \\
 d_{31} & d_{32} & d_{33} - p & \dots & d_{3n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \dots & d_{nn} - p
 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.28}$$



Решения этой системы  $X_1(p) \dots X_n(p)$  должны быть, затем подвергнуты обратному преобразованию Лапласа для того, чтобы получить решение  $X_1(t) \dots X_n(t)$  исходной задачи Коши.

Отметим, что, приравнявая нулю, главный определитель системы алгебраических уравнений (1.31), получим характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений (1.29).

#### 1.4 Структурированные модели и передаточные функции систем управления.

Реальные системы управления представляют собой совокупность отдельных элементов и блоков соединенных между собой посредством связей. Поэтому в практике гораздо удобнее бывает представлять математическую модель всей системы, как совокупность относительно простых математических моделей отдельных элементов и блоков системы. Такая форма математического описания в отличие от (1.19) отражает не только физические, но и технические принципы построения системы управления и позволяет исследовать процессы происходящие не только в системе в целом, но и процессы в отдельных ее элементах.

Структурированные модели, учитывающие техническую организацию систем управления, создаются на основе следующих допущений:

1. Все элементы системы являются простейшими звеньями, т.е. имеют один вход и один выход. Если звено характеризуется несколькими обобщенными координатами, то в качестве выходной величины выбирается та координата, которая является выходной или регулируемой величиной звена.

2. Все звенья, из которых состоит система, являются детектирующими. В детектирующем звене выходная величина зависит только от входной. Если вы-

ходная величина звена оказывает влияние на входную, то звено называется недетектирующим.

Допущения о том, что в состав системы управления должны входить только детектирующие звенья не сужает область применения структурированных моделей, так как недетектирующее звено может рассматривать как совокупность детектирующих звеньев охватываемых обратной связью.

Таким образом, структурированная модель системы управления разбивается на ряд взаимосвязанных математических моделей отдельных звеньев. Тогда, последовательно исключая из рассмотрения все внутренние переменные, являющиеся входными или выходными сигналами внутренних звеньев, найдем дифференциальное уравнение описывающее взаимосвязь входной и выходной величины системы в виде (1.21)

Взаимное соответствие математических моделей (1.17) и (1.19) наиболее просто устанавливается в случае нулевых начальных условий и отсутствия внешних возмущений.

Подвергая (1.19) и (1.21) преобразованию Лапласа при нулевых начальных условиях и полагая в (1.19)  $X_n(p) = Y(p)$ ,  $U_1(p) = U(p)$ ;  $U_i(p) = 0$  получим два алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} \Delta Y(p) &= \Delta_1 U; \\ (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) \cdot Y(p) &= (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) \cdot X(p), \end{aligned} \quad (1.32)$$

где  $\Delta$  - характеристический полином (главный определитель) системы уравнений (1.19). Определитель  $\Delta_1$  получается заменой в характеристическом полиноме последнего столбца на столбец свободных членов.

Последнее уравнение (1.32) можно переписать в виде:

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (1.33)$$

Это отношение называется передаточной функцией звена или системы и обозначается символом  $W(p)$ .

Передаточной функцией системы называется отношение выходной величины к входной, преобразованных по Лапласу при нулевых начальных условиях и возмущениях.

Зная передаточную функцию системы или звена можно легко получить дифференциальное уравнение в форме (1.21), справедливо также и обратное утверждение. Как уже отмечалось ранее п. 1.3 однозначный переход от (1.19) к (1.33) возможен, а обратный переход будет неоднозначным.

В качестве примера получим дифференциальное уравнение звена, передаточная функция которого имеет вид.

$$W(p) = \frac{b_0 p + b_1}{p^2 + a_1 p + a_2};$$

Используя определение передаточной функции, запишем дифференциальное уравнение в символической форме

$$(p^2 + a_1 p + a_2) \cdot Y(p) = (b_0 p + b_1) \cdot U(p);$$

Перейдем к оригиналам, используя правила преобразования Лапласа

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + a_1 \frac{dY}{dt} + a_2 Y = b_0 \frac{dU}{dt} + b_1 U;$$

Так как однозначный переход от этого уравнения к системе уравнений записанных в форме Коши невозможен, что следует из (1.25) примем

$a_{11} = 0$ ;  $a_{12} = 1$ . Тогда  $a_{21} = -a_1$ ;  $a_{22} = -a_2$ ;  $e_{11} = -\frac{b_1}{a_2}$  и система уравнений Коши

примет вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - \frac{b_1}{a_2} U;$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a_2 x_1 - a_1 x_2 + b_0 U.$$

### 1.5. Динамические звенья и структурные схемы систем управления.

#### Правила преобразования структурных схем.

Описание систем автоматического управления с помощью математических моделей, построенных на основе дифференциальных уравнений и передаточных функций, отличается малой наглядностью. Кроме этого, возникают значительные, а иногда и непреодолимые трудности при получении дифференциальных уравнений системы. Учитывая, то обстоятельство, что любая самая сложная система управления состоит из ограниченного набора элементов, соединенных определенным образом между собой, математическую модель всей системы целесообразно представлять в виде совокупности относительно простых моделей входящих в нее элементов. Такие элементы системы автоматического управления называются динамическими звеньями. Под динамическим звеном понимают устройство любого физического типа и конструктивного оформления, описываемое дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Для определения минимального набора динамических звеньев из которого можно создавать любые системы управления можно воспользоваться разложением передаточной функции системы, являющейся правильной дробно-рациональной функцией оператора  $p$  на простые дроби или сомножители.

Из курса алгебры известно, что любую правильную дробно-рациональную функцию можно представить в виде суммы простых дробей вида

$$W(p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(p - p_i)^j}, \quad (1.34)$$

или в виде произведения

$$W(p) = \frac{b_0 \prod_{j=1}^m (p - p_j)}{\prod_{i=1}^n (p - p_i)}, \quad (1.35)$$

где  $P_i$  - корни уравнения, получаемого путем приравнивания нулю знаменателя передаточной функции (нули передаточной функции);  $P_j$  - корни уравнения, получаемого путем приравнивания нулю числителя передаточной функции (полюса передаточной функции);  $n, m$  - порядок многочлена знаменателя и числителя передаточной функции;  $k_p$  - кратность нулей передаточной функции;  $A_{ij}$  - постоянные коэффициенты.

Предположим, что все нули и полюса передаточной функции лежат в левой полуплоскости, включая и мнимую ось, т.е. действительные нули и полюса отрицательны, а комплексно-сопряженные нули и полюса имеют отрицательную вещественную часть. В этом случае динамические звенья системы будут минимально-фазовыми, и их минимальный набор будет включать в себя:

1. Интегрирующие звенья с передаточной функцией и дифференциальным уравнением:

$$W(P) = \frac{1}{TP}; \quad T \frac{dY}{dt} = X. \quad (1.36)$$

2. Дифференцирующие звенья с передаточной функцией и дифференциальным уравнением:

$$W(P) = kP; \quad Y = k \frac{dX}{dt}. \quad (1.37)$$

3. Апериодические звенья первого порядка:

$$W(P) = \frac{k}{TP+1}; \quad T \frac{dY}{dt} + Y = kX. \quad (1.38)$$

4. Колебательные звенья:

$$W(P) = \frac{k}{T^2 P^2 + 2\xi TP + 1};$$

$$T^2 \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\xi T \frac{dY}{dt} + Y = kX. \quad (1.39)$$

Нетрудно убедиться, что путем простейших алгебраических операций умножения и сложения можно получать любые выражения передаточных функций.

Если некоторые нули и полюса передаточной функции системы располагаются в правой полуплоскости, это свидетельствует о наличии в составе системы не минимально- фазовых звеньев. Таким звеном является звено чистого запаздывания с передаточной функцией и уравнением, связывающим выходную координату с входной

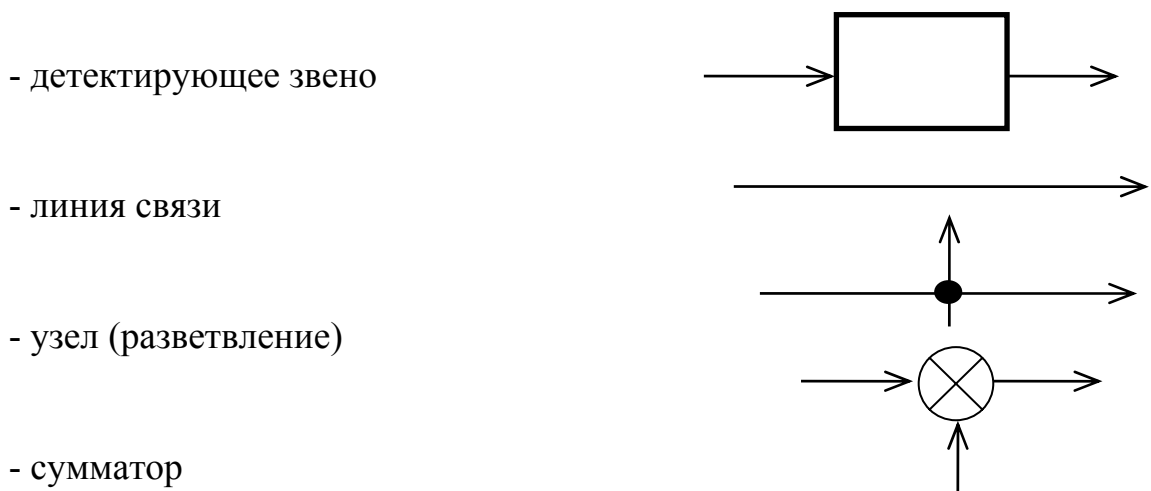
$$W(p) = e^{-p\tau};$$

$$Y(t) = x(t - \tau). \quad (1.40)$$

Разложение передаточной функции системы на простейшие дроби дает возможность предположить, что любую систему автоматического регулирования можно рассматривать как комбинацию минимального набора динамических звеньев определенным образом соединенных между собой.

Изображение системы управления в виде совокупности динамических звеньев с указанием связей между ними носит название структурной схемы.

Основными элементами структурных схем являются:



Любая структурная схема может быть изображена с помощью трех типов соединения звеньев: последовательного соединения; параллельного соединения; соединения с обратной связью.



Рассмотрим структурные схемы таких соединений и найдем соотношения между передаточной функцией полученной системы и передаточными функциями отдельных звеньев, из которых эта система состоит. Принимаем, что все звенья являются детектирующими.

### Последовательное соединение звеньев.

При таком соединении выход предыдущего звена включается на вход следующего. Структурная схема соединения звеньев показана на рис. 1.1

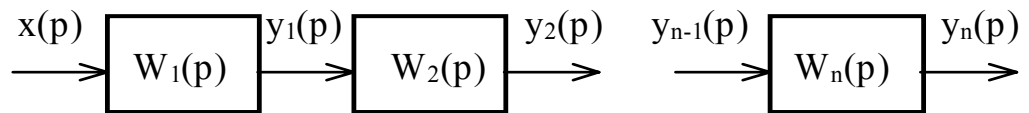


Рис. 1.1

Уравнения отдельных звеньев в символической форме будут выглядеть:

$$\begin{aligned}
 Y_1(p) &= W_1(p)X(p); \\
 Y_2(p) &= W_2(p)Y_1(p); \\
 &\vdots \\
 Y(p) &= W_n(p)Y_{n-1}(p).
 \end{aligned}$$

Последовательно исключая промежуточные переменные получим:

$$Y(p) = W_1(p)W_2(p)\dots W_n(p)X(p).$$

Откуда следует, что передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев, входящих в соединение.

$$W_{noc}(P) = \prod_{i=1}^n W_i(P). \quad (1.41)$$

### Параллельное соединение звеньев.

При таком соединении входные сигналы всех звеньев одинаковы и равны общему входному сигналу, а выходной сигнал соединения равен алгебраической сумме выходных сигналов. Структурная схема параллельного соединения звеньев показана на рис. 1.2.

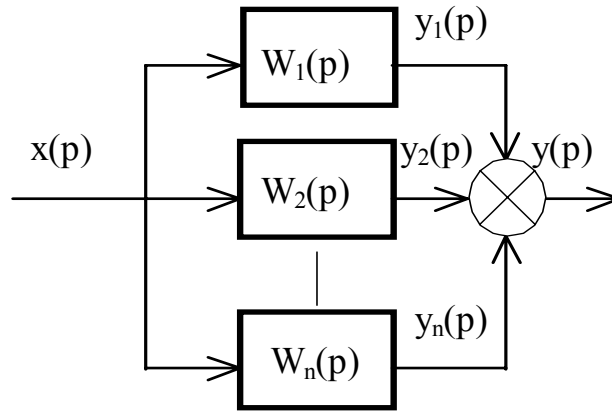


Рис. 1.2

Аналогично, как и в случае последовательного соединения, запишем уравнения для выходных сигналов звеньев:

$$\begin{aligned}
 Y_1(p) &= W_1(p)X(p); \\
 &\vdots \\
 Y_n(p) &= W_n(p)X(p); \\
 Y(p) &= Y_1(p) + Y_2(p) + \dots + Y_n(p).
 \end{aligned}
 \tag{1.42}$$

Подставляя выражения для  $Y_i(p)$  в последнее уравнение, получим:

$$Y(p) = [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)]X(p).$$

Откуда, передаточная функция параллельного соединения звеньев равна сумме передаточных функций отдельных звеньев

$$W_{\text{пар}}(P) = \sum_{i=1}^n W_i(P). \tag{1.43}$$

Соединение звеньев с обратной связью.

Такое соединение звеньев изображено на рис. 1.3.

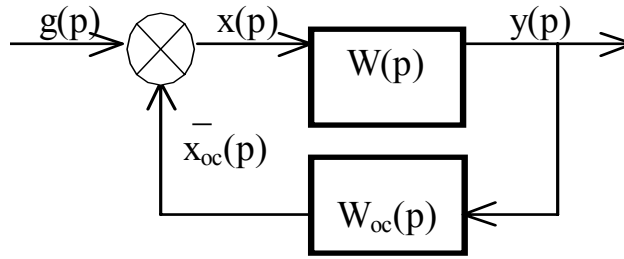


Рис. 1.3.

Знак плюс соответствует положительной обратной связи, знак минус - отрицательной. Для такого соединения звеньев справедливы следующие очевидные соотношения между переменными

$$\begin{aligned} X(p) &= g(p) \pm X_{oc}(p); \\ Y(p) &= W(p)X(p) \\ X_{oc}(p) &= W_0(p)Y(p). \end{aligned}$$

Разрешая эту систему уравнений относительно  $X(p)$  и  $Y(p)$ , получим:

$$Y(p)[1 \pm W(p)W_0(p)] = W(p)X(p).$$

Знак минус относится к положительной обратной связи, знак плюс - к отрицательной.

Откуда выражение передаточной функции для соединения с обратной связью будет выглядеть:

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 \pm W(p)W_{oc}(p)}. \quad (1.44)$$

Следует обратить внимание на то, что, имея структурную схему, можно однозначно с использованием правил преобразования структурных схем, получить выражение для передаточной функции и дифференциального уравнения системы. Обратное утверждение будет неверным, т.е. одной и той же передаточной функцией системы может соответствовать несколько структурных схем [11].

Покажем это на примере. Пусть имеется передаточная функция звена, записанная в виде:

$$W(p) = \frac{b_0 p + b_1}{p^2 + a_1 p + a_2}. \quad (1.45)$$

Запишем ее через отрицательные степени оператора  $p$ .

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_0 p^{-1} + b_1 p^{-2}}{1 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2}}. \quad (1.46)$$

Введем вспомогательную переменную  $E(p)$  равную

$$E(p) = \frac{u(p)}{1 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2}}, \quad (1.47)$$

или

$$u(p) = E(p) - a_1 p^{-1} E(p) - a_2 p^{-2} E(p),$$

откуда нетрудно составить и структурную схему (рис. 1.4).

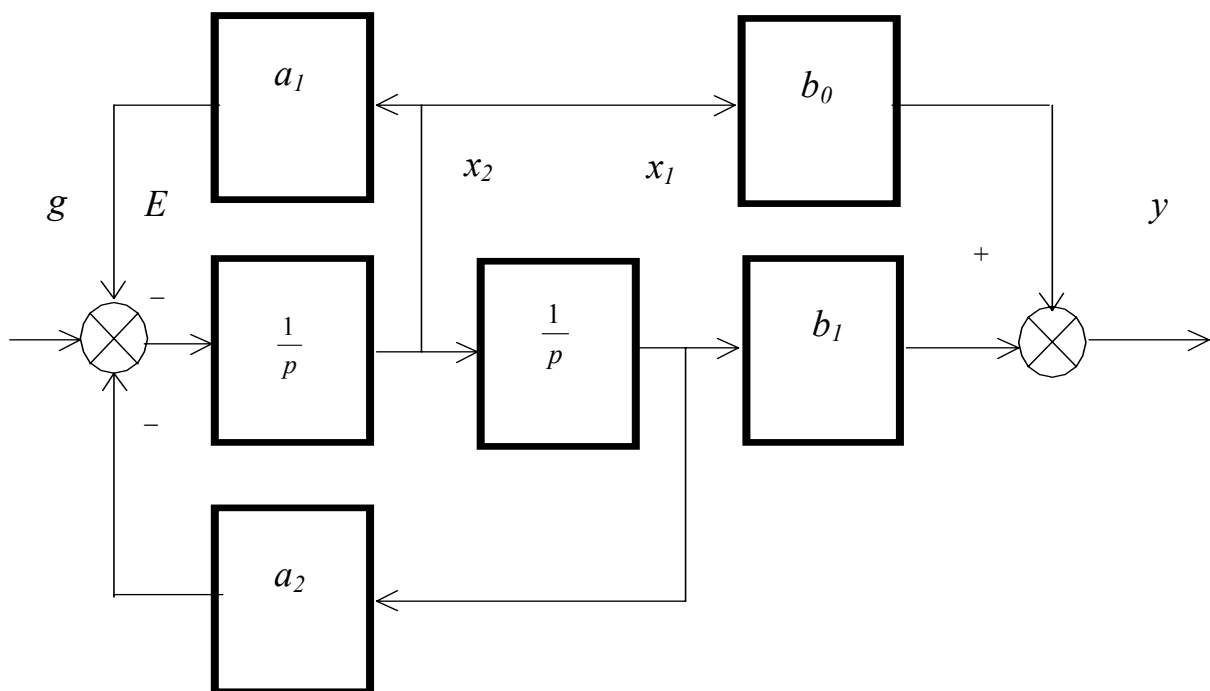


Рис. 1.4

Дифференциальные уравнения для переменных состояния или фазовых переменных могут быть легко найдены из рассмотрения структурной схемы системы.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= u - a_2x_1 - a_1x_2; \\ y &= b_1x_1 + b_0x_2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Разложим (1.45) на простейшие дроби, предполагая, что характеристическое уравнение звена имеет действительные корни  $p_1$  и  $p_2$ . Согласно теореме Виетта  $-(p_1 + p_2) = a_1$ ,  $p_1p_2 = a_2$ . Тогда выражение передаточной функции примет следующий вид:

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2},$$

где  $A = \frac{b_0p_1 + b_1}{p_1 - p_2}$ ,  $B = -\frac{b_0p_2 + b_1}{p_1 - p_2}$ . Структурная схема следует из выражения переда-

точной функции непосредственно (рис. 1.5).

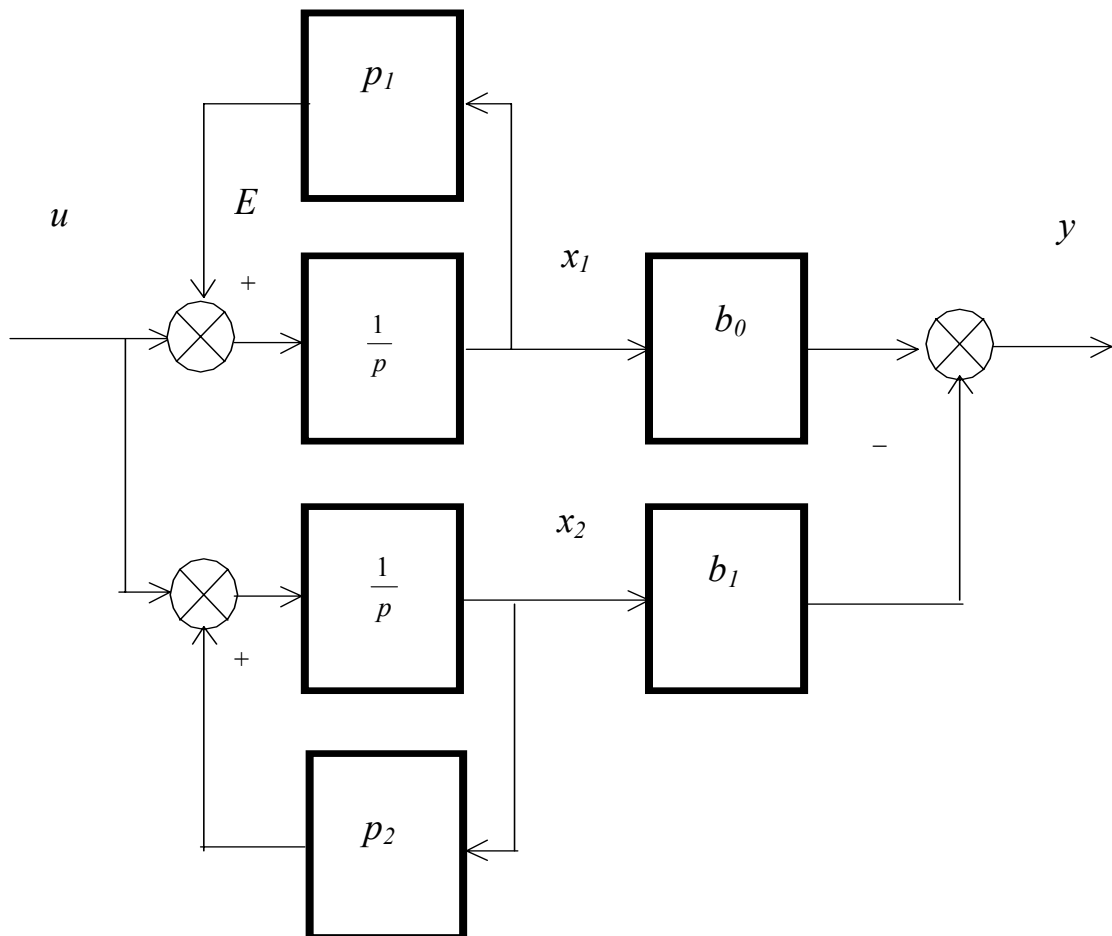


Рис. 1.5

Система дифференциальных уравнений теперь выглядит

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u - p_1 x_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= u - p_2 x_2; \\ y &= Ax_1 + Bx_2. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Если теперь записать (1.45) в виде произведения дробей, то получим следующее выражение

$$\frac{y(p)}{u(p)} = \frac{b_0 p + b_1}{(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Введем переменные состояния  $x_1 = \frac{x_2}{p - p_1}$ ,  $x_2 = \frac{u}{p - p_2}$ , тогда

$y(p) = (b_0 p + b_1)x_1$ . Отсюда можно получить структурную схему (рис. 1.6) и уравнения в переменных состояния

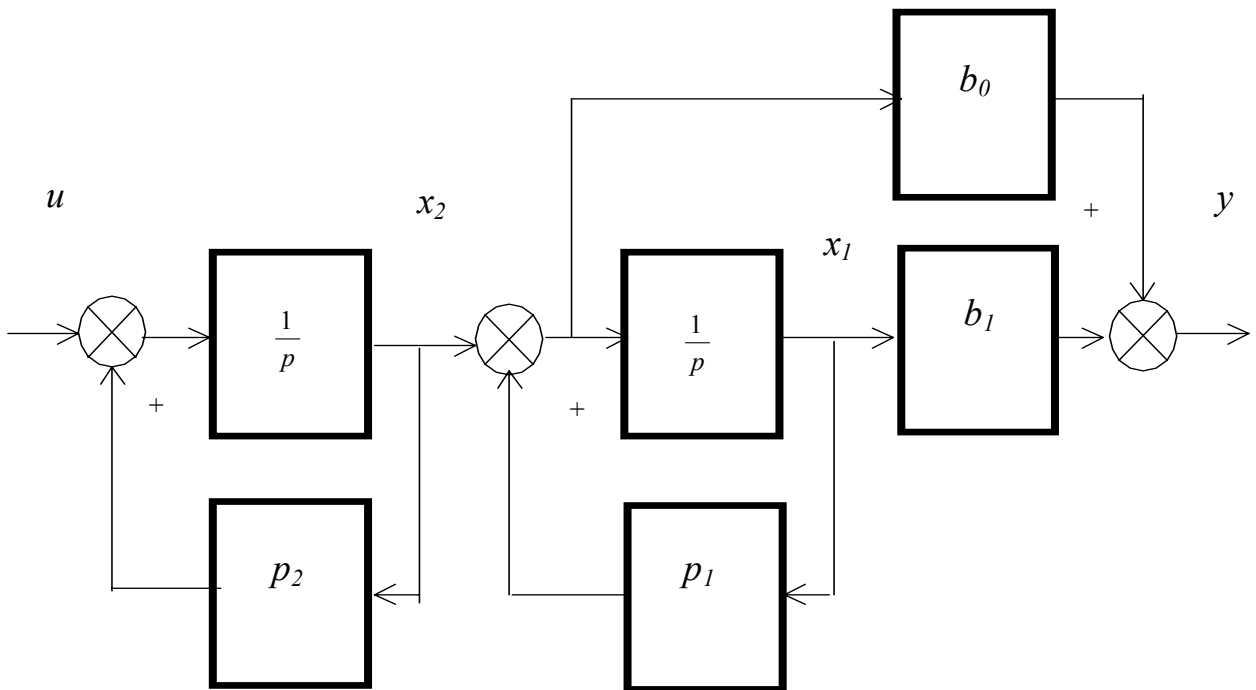


Рис. 1.6.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= p_1 x_1 + x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= u + p_2 x_2; \\ y &= (b_0 p_1 + b_1) x_1 + b_0 x_2. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Сравнивая уравнения состояния (1.48) - (1.50) и структурные схемы рис. 1.4-1.6 можно сделать вывод о том, что одной передаточной функции (1.45) могут соответствовать различные структурные схемы и уравнения состояния. Такое многообразие структурных схем обусловлено выбором различных систем отсчета для переменных состояния. Выбирая переменные состояния в различных координатных системах можно будет получать и различные структурные схемы.

## 1.6. Временные характеристики

В общем случае под временной характеристикой следует понимать реакцию системы  $Y(t)$  на входной сигнал  $X(t)$ , являющийся произвольной функцией времени. В операторной форме выходной сигнал можно вычислить так:

$$Y(P) = W(P)X(P). \quad (1.51)$$

Переходя к оригиналам можно записать:

$$L[Y(t)] = L[\omega(t)]L[X(t)], \quad (1.52)$$

где  $L$  – оператор преобразования Лапласа.

Применим к этому выражению теорему о свертке

$$L[\omega(t)] \cdot L[X(t)] = L\left[\int_0^t \omega(t-\tau)X(\tau)d\tau\right]. \quad (1.53)$$

Откуда найдем  $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t \omega(t - \tau)X(\tau)d\tau. \quad (1.54)$$

Функция  $\omega(t)$  определяемая как обратное преобразование Лапласа от передаточной функции называется функцией веса, а выражение (1.53) интегралом Дюамеля. Функция веса, таким образом, представляет собой обратное преобразование Лапласа от передаточной функции и также характеризует динамические свойства системы. Однако в отличие от передаточной функции она являясь функцией времени, может непосредственно наблюдаться и, следовательно, может быть определена из эксперимента.

Из выражения (1.54) найдем, каким должен быть сигнал на входе системы  $X(t)$ , чтобы его выходной сигнал являлся функцией веса. Для этого заменим  $Y(t)$  на  $\omega(t)$ , а  $X(t)$  на  $\delta(t)$

$$\omega(t) = \int_0^t \omega(t - \tau)\delta(\tau)d\tau. \quad (1.55)$$

Используя вторую теорему о среднем значении определенного интеграла [2] можно записать:

$$\int_0^t \omega(t - \tau)\delta(\tau)d\tau = \omega(t) \int_0^\xi \delta(\tau)d\tau + \omega(0) \int_\xi^t \delta(\tau)d\tau. \quad (1.56)$$

Выражение (1.56) будет равно (1.55) только в том случае если при любом  $0 \leq \xi \leq \infty$

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_0^\xi \delta(\tau)d\tau = 1. \quad (1.57)$$

Это предел существует, если  $\delta(t)$  принимает следующие значения

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases} \quad (1.58)$$

и называется дельта-функцией, или функцией Дирака.



На практике сформировать такой импульс на входе системы невозможно, однако если длительность импульса  $t_u$  достаточно мала, то реакция системы на такой импульс в силу ее линейности будет приблизительно равна его площади.

Для проверки этого предположения рассмотрим простейший пример действия на аperiodическое звено первого порядка импульса произвольной формы  $U_0(\tau)$  и длительностью  $t_u$ .

Выражение для функции веса найдем по таблице преобразования Лапласа

$$\omega(t) = ke^{-\frac{t}{T}}.$$

Подставим это выражение в (1.48) и учтем, что значение входного сигнала равно нулю при  $t < t_u$ . Изменяя пределы интегрирования получим:

$$Y(t) = \int_0^{t_u} ke^{-\frac{t-\tau}{T}} U_0(\tau) d\tau.$$

Вынесем коэффициенты и переменные, не зависящие от  $\tau$ , за знак интеграла:

$$Y(t) = ke^{-\frac{t}{T}} \int_0^{t_u} U_0(\tau) e^{\frac{\tau}{T}} d\tau.$$

Применяя вторую теорему о среднем значении определенного интеграла найдем приближенное выражение для  $y(t)$ .

$$Y(t) = ke^{-\frac{t}{T}} \left[ \int_{-0}^{\xi} U_0(\tau) d\tau + e^{\frac{t_u}{T}} \int_{\xi_i}^{t_u} U_0(\tau) d\tau \right].$$

Если предположить, что  $t_u \ll T$ , то  $e^{-\frac{t_u}{T}} \approx 1$  и  $Y(t) \approx \omega(t) \int_0^{t_u} U_0(\tau) d\tau$ .

Иногда экспериментальное определение функции веса путем подачи на вход системы коротких импульсов не всегда возможно. В этом случае на вход подают единичную ступенчатую функцию.

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.59)$$

Реакцию системы на единичную ступенчатую функцию (функцию Хевисайда) называют переходной характеристикой или кривой разгона и обозначают  $h(t)$ .

Очевидно, в силу линейности преобразования Лапласа между функцией веса и переходной функцией существуют такие же соотношения как между  $\delta$ -функцией и единичной функцией

$$\begin{aligned} \frac{dh(t)}{dt} &= \omega(t); & \frac{d1(t)}{dt} &= \delta(t); \\ \int_0^t \omega(\tau) d\tau &= h(t); & \int_0^t \delta(\tau) d\tau &= 1(t). \end{aligned} \quad (1.60)$$

Для установления взаимного соответствия между передаточной функцией системы и переходной характеристикой достаточно подвергнуть преобразованию Лапласа (1.54)

$$ph(P) = \omega(p) = W(p). \quad (1.61)$$

### 1.7. Частотные характеристики

Использование преобразований Лапласа упрощает исследование систем управления, так как позволяет перейти от решения дифференциальных уравнений к решению эквивалентным им алгебраических уравнений.

Однако, остается неясным, как экспериментальным путем определить коэффициенты дифференциальных уравнений или передаточных функций системы. Использование для этих целей экспериментально снятых временных характеристик может внести значительные погрешности в определении передаточной функции из-за неточного воспроизведения входных тестовых сигналов ( $\delta$ -функции и единичной функции), а также наличия помех.

Для экспериментального определения параметров передаточной функции можно воспользоваться еще одним интегральным преобразованием - преобразованием Фурье.

Это преобразование аналогично преобразованию Лапласа и задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt; \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega, \end{aligned} \quad (1.62)$$

где  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  - круговая частота,  $j = \sqrt{-1}$

Первое выражение является прямым преобразованием Фурье, второе - обратным.

Формально преобразование Фурье отличаются от преобразования Лапласа заменой оператора  $j\omega$  на оператор  $p$  и изменение предела интегрирования в первом выражении.

По аналогии с передаточной функцией  $W(p)$  можно ввести понятие частотной передаточной функции  $W(j\omega)$  равной отношению преобразованных по Фурье выходной и входной величин системы при нулевых начальных условиях

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)}. \quad (1.63)$$

Выражение (1.63) позволяет экспериментально определить значение  $W(j\omega)$  при заданной частоте  $\omega$ . Для этого необходимо на вход системы подать гармонический входной сигнал определенной частоты  $\omega$   $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$ .

В линейной системе выходной сигнал  $y(t)$  также будет гармоническим  $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \varphi)$ , где  $\varphi$  - фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами. Подвергая эти сигналы преобразованию Фурье, найдем что:

$$\begin{aligned} x(j\omega) &= x_0; \\ y(j\omega) &= y_0 e^{j\varphi}. \end{aligned}$$

Тогда из (1.57) можно вычислить  $W(j\omega)$  для конкретного значения  $\omega$  :

$$W(j\omega) = \frac{y_0 e^{j\varphi}}{x_0} = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1.64)$$

Задаваясь различными значениями частоты  $\omega$  и измеряя амплитуды входного  $x_0$  и выходного  $y_0$  сигналов системы, а также фазовый сдвиг между ними можно найти зависимость  $W(j\omega)$  как функцию частоты, а затем вычислить коэффициенты  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  частотной передаточной функции.

Из (1.64) следует, что частотная передаточная функция является комплексной функцией, зависящей от  $\omega$ . Используя показательную и алгебраическую форму представления комплексных чисел можно выделить в  $W(j\omega)$  модуль, аргумент, вещественную и мнимую части.

Модуль частотной передаточной функции равный отношению амплитуды выходного и входного гармонических сигналов, как функции частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) и обозначается  $A(\omega)$ .

$$A(\omega) = |W(j\omega)|. \quad (1.65)$$

Аргумент  $W(j\omega)$  равный фазовому сдвигу между выходным и входным сигналами, как функции  $\omega$ , называется фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) и обозначается  $\varphi(\omega)$ .

$$\varphi(\omega) = \arg[W(j\omega)]. \quad (1.66)$$

Аналогично вещественная и мнимая части  $W(j\omega)$  называются вещественной (ВЧХ)  $U(\omega)$  и мнимой (МЧХ)  $V(\omega)$  частотными характеристиками

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= U(\omega) + jV(\omega); \\ U(\omega) &= \operatorname{Re}[W(j\omega)]; \quad V(\omega) = \operatorname{Im}[W(j\omega)]. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Между этими характеристиками существуют очевидные соотношения:

$$A(\omega) = \sqrt{[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \quad (1.68)$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos[\varphi(\omega)]; \quad V(\omega) = A(\omega) \sin[\varphi(\omega)].$$

Кроме этих четырех частотных характеристик существует еще амплитудно-фазо-частотная характеристика АФЧХ, представляющая собой годограф частотной передаточной функции. Годограф - это геометрическое место точек вектора  $W(j\omega)$  на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

В качестве примера найдем частотные характеристики аperiodического звена первого порядка с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}.$$

Запишем выражение для частотной передаточной функции  $W(j\omega)$ , делая формальную замену  $p = j\omega$ .

$$W(j\omega) = \frac{k}{T(j\omega) + 1} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Пользуясь соотношениями (1.65)-(1.68) найдем:

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T.$$

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}; \quad V(\omega) = -\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Для получения аналитического выражения для АФЧХ сделаем подстановку  $x = U(\omega)$ ;  $y = V(\omega)$  в выражения для ВЧХ и МЧХ и исключим параметр  $\omega$ . После преобразований получим уравнение АФЧХ на комплексной плоскости:

$$\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{4}.$$

Это уравнение полуокружности с центром  $k/2$ ;  $j0$  и радиусом  $k/2$ .

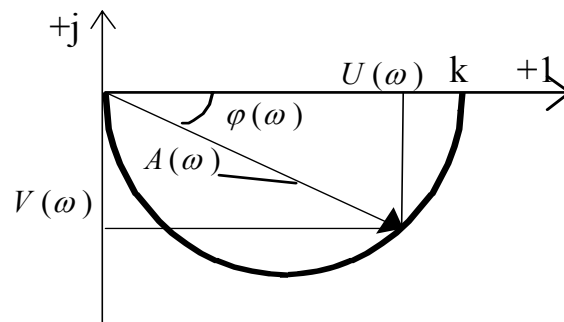


Рис. 1.7.

Помимо выше приведенных частотных характеристик в теории управления широко используются логарифмические частотные характеристики, построение которых осуществляется на основе простейших вычислений.

Прологарифмируем выражение частотной передаточной функции (1.64):

$$\ln[W(j\omega)] = \ln[A(\omega)] + j\varphi(\omega). \quad (1.69)$$

Как видно из этого выражения логарифм частотной передаточной функции равен комплексному числу, вещественная часть которого является логарифмом модуля частотной передаточной функции, а мнимая – фазой.

Для построения логарифмических частотных характеристик используются десятичные логарифмы и строят отдельно логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАЧХ) и логарифмическую фазовую частотную характеристику (ЛФЧХ), которая фактически совпадает с фазовой частотной характеристикой

$$L(\omega) = 20 \lg|W_o(j\omega)| = 20 \lg[A_o(\omega)]. \quad (1.70)$$

Эта величина выражается в децибелах. Бел представляет собой логарифмическую единицу соответствующую десятикратному увеличению мощности. Децибел равен одной десятой части бела.

Расчет и построение ЛАЧХ в соответствии с (1.70) предполагает, чтобы АЧХ стоящая под знаком десятичного логарифма была безразмерной величиной мощности. Поэтому в том случае если  $A(\omega)$  имеет какую-либо размерность в (1.70) используют относительную передаточную функцию и относительную частотную характеристику

$$A_o(\omega) = \frac{A(\omega)}{A_\delta}, \quad (1.71)$$

где  $A_\delta = 1$  – базовое значение, имеющее размерность  $A(\omega)$ .

Появление дополнительного множителя в выражении для ЛАЧХ равного двум обусловлено тем, что  $A(\omega)$  представляет собой отношение не мощностей, а

их квадратов, т.е. при увеличении коэффициента передачи в  $k$  раз, усиление мощности происходит в  $k^2$  раз, что и вызывает появление дополнительного сомножителя в (1.70) равного двум.

Построим ЛАЧХ типовых звеньев.

1. Безинерционное звено  $A(\omega) = k$ ,  $L(\omega) = 20 \lg(k)$ . ЛАЧХ безинерционного звена представляет собой прямую параллельную оси абсцисс (прямая 1 на рис. 1.8.).

2. Интегрирующее звено  $A(\omega) = \frac{k}{\omega}$ ,  $L(\omega) = 20 \lg(k) - 20 \lg(\omega)$ . ЛАЧХ интегрирующего звена это прямая линия, проходящая через точку с координатами  $\omega = 1$  и  $L(\omega) = 20 \lg(k)$  и имеющая отрицательный наклон  $-20 \frac{\text{дб}}{\text{дек}}$  (прямая 2 на рис. 1.8.).

3. Дифференцирующее звено  $A(\omega) = k\omega$ ,  $L(\omega) = 20 \lg(k) + 20 \lg(\omega)$ . ЛАЧХ дифференцирующего звена это прямая линия, проходящая через точку с координатами  $\omega = 1$  и  $L(\omega) = 20 \lg(k)$  и имеющая положительный наклон  $20 \frac{\text{дб}}{\text{дек}}$  (прямая 3 на рис. 1.8.).

4. Аperiodическое звено первого порядка  $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2 \omega^2}}$ ,  
 $L(\omega) = 20 \lg(k) - 10 \lg(1 + T^2 \omega^2)$ . Эту характеристику приближенно можно заменить асимптотической (прямая 4 на рис.1.8.)

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 \lg(k), & \text{при } \omega < \frac{1}{T}; \\ 20 \lg(k) - 20 \lg(T) - 20 \lg(\omega), & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

Максимальная ошибка такого приближения на сопрягающей частоте  $\omega = \frac{1}{T}$

не превышает 3дб.

5. Колебательное звено  $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}$ . Асимптотическая

ЛАЧХ которого равна (прямая 5 на рис.1.8.)

$$L(\omega) \approx \begin{cases} 20 \lg(k), & \text{при } \omega < \frac{1}{T}; \\ 20 \lg(k) - 40 \lg(T) - 40 \lg(\omega), & \text{при } \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

Для построения ЛАЧХ используется стандартная логарифмическая сетка. По оси частот откладывается угловая частота в логарифмическом масштабе, т.е. наносятся отметки, соответствующие  $\lg \omega$ , а около отметок пишется само значение частоты  $\omega$  в рад/с.

По оси ординат откладывается модуль нормированной амплитудно-частотной характеристики в дб. Ось абсцисс (частот) должна пересекать ось ординат в точке 0 дб, что соответствует значению  $A(\omega) = 1$ .

Ось ординат может пересекать ось абсцисс в произвольном месте, но обязательно левее самой малой сопрягающей частоты, соответствующей наибольшей постоянной времени системы. Такое построение оси абсцисс необходимо, чтобы справа от нее можно было показать всю ЛАЧХ..

Для построения ЛФЧХ используется та же ось абсцисс (ось частот). По оси ординат откладывается фаза в градусах или радианах в линейном масштабе.



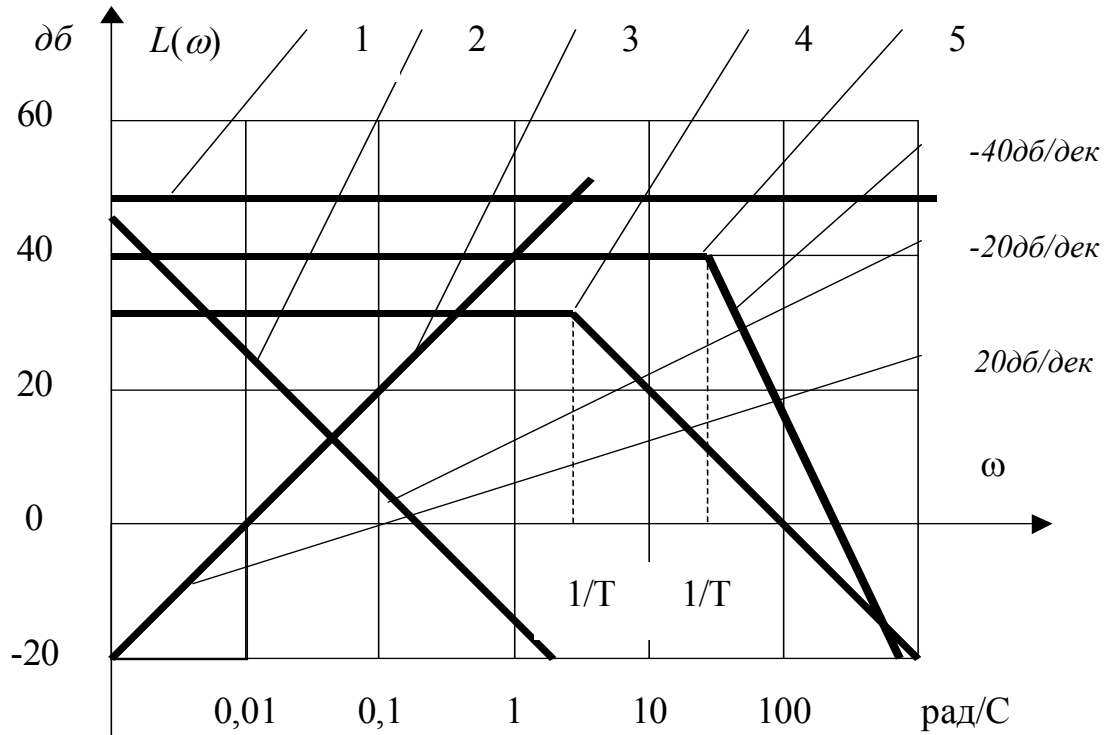


Рис. 1.8.

Главным достоинством логарифмических амплитудных частотных характеристик является возможность их построения практически без вычислительной работы. Это особенно проявляется в тех случаях, когда частотная передаточная функция может быть представлена в виде произведения передаточных функций типовых звеньев. Тогда результирующая ЛАЧХ может быть построена суммированием ординат ЛАЧХ отдельных сомножителей, и будет представлять собой совокупность отрезков прямых с наклонами, кратными величине  $20 \frac{\text{дБ}}{\text{дек}}$

## 2. МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ.

### 2.1 Понятие пространства состояний.

К многомерным системам относятся такие системы, у которых имеется несколько управляемых и управляющих величин. Например, системы автоматического регулирования частоты вращения двигателей переменного тока, сис-

темы регулирования напряжения и частоты синхронного генератора, системы управления промышленными роботами, системы управления подвижными объектами.

При исследовании многомерных систем пользуются методами пространства состояний [11]. В отличие от подхода основанного на использовании структурных схем и передаточных функций использование метода пространства состояний основано на возможности описания поведения системы некоторым количеством дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных состояния с начальными условиями. Понятие состояния, лежащее в основе современного подхода к описанию поведения динамических систем, было впервые введено Тьюрингом в 1936 г. Позднее это понятие было использовано Шенноном в его работах по теории информации. Начало широкому использованию этого подхода для решения задач автоматического управления положили российские ученые М.А. Айзерман, А.А. Фельдбаум, А.М. Летов, А.И. Лурье. За рубежом распространение этих идей и основанных на них методах анализа и синтеза систем управления принадлежит Р. Беллману и Р. Калману.

Многомерная система предполагает наличие многомерного объекта управления, который характеризуется входными и выходными переменными, к которым относятся:

1) входные переменные, представляющие сигналы, генерируемые системами, внешними по отношению к исследуемой, и влияющие на ее поведение. Входные переменные разделяются на управляющие переменные, задаваемые вектором  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_k)^T, \quad (2.1)$$

и возмущающие воздействия, задаваемые вектором  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_l)^T, \quad (2.2)$$

2) выходные или регулируемые переменные, задаваемые вектором регулируемых величин  $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T, \quad (2.3)$$

3) переменные (обобщенные координаты) состояния или промежуточные переменные, задаваемые вектором обобщенных координат  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (2.4)$$

Переменные многомерного объекта являются векторными величинами, зависящими от времени, а сам объект может быть структурой рис. 2.1.

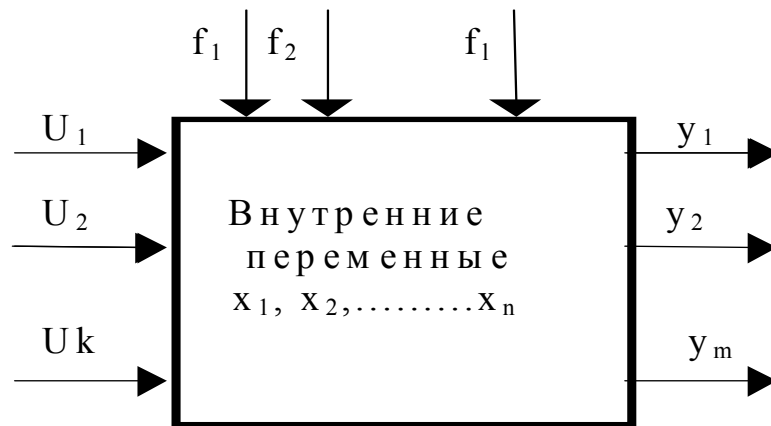


Рис 2.1.

Согласно понятию векторного пространства множество всех значений, которые может принять вектор управления  $\mathbf{U}$  в момент времени  $t$ , образует пространство управляющих величин. Аналогично, множество всех значений, которые могут принимать векторы возмущений  $\mathbf{f}$ , регулируемых величин  $\mathbf{y}$  и обобщенных координат  $\mathbf{x}$  в момент времени  $t$ , образуют пространство возмущающих воздействий, пространство регулируемых величин и пространство состояний системы.

В любой момент времени  $t$  состояние системы является функцией начального состояния  $\mathbf{x}(t_0)$  и вектора входных величин  $\mathbf{U}(t_0, t)$  и  $\mathbf{f}(t_0, t)$

$$\mathbf{x}(t) = F[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}(t_0, t); \mathbf{f}(t_0, t)], \quad (2.5)$$

где  $F$  - однозначная функция своих аргументов.

Вектор регулируемых величин в момент  $t$  является также функцией начального состояния  $\mathbf{x}_0(t_0)$  и вектора входных величин  $\mathbf{U}(t_0, t)$  и  $\mathbf{f}(t_0, t)$  и может быть записан как

$$\mathbf{y}(t) = \Psi[\mathbf{x}(t_0); \mathbf{u}(t_0, t); \mathbf{f}(t_0, t)]. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.5) и (2.6) называют уравнениями состояния системы. Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, уравнения (2.5) и (2.6) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= F[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t); \mathbf{f}(t)]; \\ \mathbf{y}(t) &= \Psi[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t); \mathbf{f}(t)]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для линейных систем уравнения состояния сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}(t)\mathbf{f}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{f}(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнение (2.7) и (2.8) устанавливает взаимосвязь между входными (управляющими и возмущающими) и выходными (фазовыми) координатами объекта, определяемую видом функций  $F[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t); \mathbf{f}(t)]$  и  $\Psi[\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(t); \mathbf{f}(t)]$ , а также позволяет описать процесс движения системы в пространстве состояний, как результат решения векторного дифференциального уравнения (2.7) или (2.8).

## 2.2 Понятие матрицы передаточной функции, матриц временных и частотных характеристик.

Введение векторных переменных позволяет для линейных систем использовать привычный аппарат передаточных функций и структурных схем, однако понятие передаточной функции значительно расширяется.

Пусть имеется многомерная система управления со структурной схемой показанной на рис. 2.2. и системой дифференциальных уравнений, записанных в символической форме.

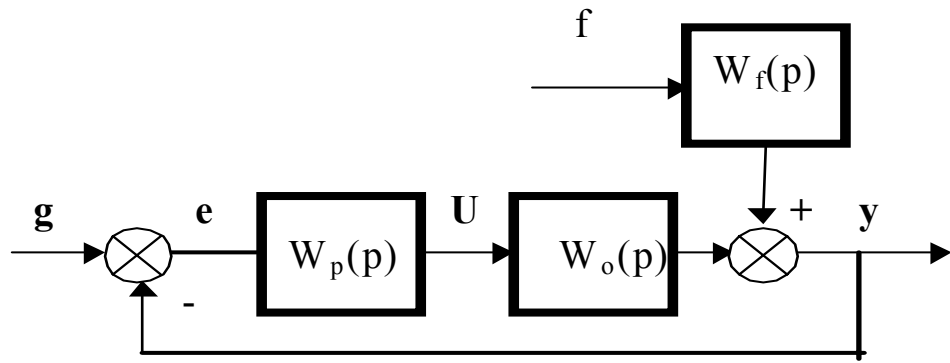


Рис 2.2.

По аналогии с одномерными системами можно записать [2]:

$$\mathbf{Q}(p)\mathbf{y}(p) = \mathbf{R}(p)\mathbf{U}(p) + \mathbf{S}(p)\mathbf{f}(p), \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{Q}(p)$ -квадратная матрица операторных коэффициентов размера  $n \times n$

$$\mathbf{Q}(p) = \begin{pmatrix} q_{11}(p); q_{12}(p); \dots q_{1n}(p) \\ q_{21}(p); q_{22}(p); \dots q_{2n}(p) \\ \dots \dots \dots \\ q_{n1}(p); q_{n2}(p); \dots q_{nn}(p) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{R}(p)$ - прямоугольная матрица операторных коэффициентов размера  $n \times k$

$$\mathbf{R}(p) = \begin{pmatrix} r_{11}(p); r_{12}(p); \dots r_{1k}(p) \\ r_{21}(p); r_{22}(p); \dots r_{2k}(p) \\ \dots \dots \dots \\ r_{n1}(p); r_{n2}(p); \dots r_{nk}(p) \end{pmatrix},$$

$\mathbf{S}(p)$ - прямоугольная матрица операторных коэффициентов размера  $n \times l$

$$\mathbf{S}(p) = \begin{pmatrix} s_{11}(p); s_{12}(p); \dots s_{1l}(p) \\ s_{21}(p); s_{22}(p); \dots s_{2l}(p) \\ \dots \dots \dots \\ s_{n1}(p); s_{n2}(p); \dots s_{nl}(p) \end{pmatrix}.$$

Для получения системы дифференциальных уравнений необходимо перемножить прямоугольную или квадратную матрицы на матрицы - столбцы соответствующих переменных объекта.

Взаимосвязь уравнений состояния (2.8) с уравнениями системы в виде (2.9) определяется из следующих соотношений. Из второго уравнения (2.8) выразим переменную  $\mathbf{x}(t)$  через  $\mathbf{y}(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{u}(t) - \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{f}(t) \quad (2.10)$$

и подставим это выражение в первое уравнение (2.8)

$$\mathbf{C}^{-1} \left[ \frac{d\mathbf{y}}{dt} - \mathbf{D} \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{G} \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right] = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} [\mathbf{y}(t) - \mathbf{D}\mathbf{u}(t) - \mathbf{G}\mathbf{f}(t)] + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{f}(t). \quad (2.11)$$

Преобразовывая по Лапласу (2.11) и группируя подобные члены, получим выражение аналогичное (2.9), которое путем приравнивания матриц при одноименных переменных позволяет установить взаимосвязь (2.8) с (2.9).

$$(\mathbf{I}p - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1})\mathbf{y}(p) = (\mathbf{D}\mathbf{I}p + \mathbf{C}\mathbf{B})\mathbf{u}(p) + (\mathbf{G}\mathbf{I}p + \mathbf{C}\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{E})\mathbf{f}(p), \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{I}$  - единичная матрица,  $\mathbf{S}(p) = \mathbf{I}p - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$ ,  $\mathbf{R}(p) = \mathbf{D}\mathbf{I}p + \mathbf{C}\mathbf{B}$ ,

$$\mathbf{Q}(p) = \mathbf{G}\mathbf{I}p + \mathbf{C}\mathbf{E} - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{E}.$$

По аналогии с одномерными системами, используя основные правила теории матриц, можно ввести понятие матриц передаточной функции, временных и частотных характеристик.

Если умножить (2.9) на обратную матрицу  $\mathbf{Q}^{-1}(p)$ , то получим:

$$\mathbf{y}(p) = \mathbf{Q}^{-1}(p)\mathbf{R}(p)\mathbf{u}(p) + \mathbf{Q}^{-1}(p)\mathbf{S}(p)\mathbf{f}(p). \quad (2.13)$$

Отсюда можно получить выражение для матриц передаточных функций системы по управлению

$$\mathbf{W}_u(p) = \mathbf{Q}^{-1}(p)\mathbf{R}(p). \quad (2.14)$$

и возмущению

$$\mathbf{W}_f(p) = \mathbf{Q}^{-1}(p)\mathbf{S}(p) \quad (2.15)$$

Из теории матриц известно, что обратная матрица может быть вычислена по методу неопределенных коэффициентов применительно к выражению

$$\mathbf{Q}(p)\mathbf{Q}^{-1}(p) = \mathbf{I},$$

где  $I$  - единичная матрица, что в конечном итоге приводит к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Второй способ вычисления обратной матрицы задаётся выражением:

$$\mathbf{Q}^{-1}(p) = \frac{1}{\det \mathbf{Q}} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11}; \mathbf{Q}_{12}; \dots; \mathbf{Q}_{1n} \\ \mathbf{Q}_{21}; \mathbf{Q}_{22}; \dots; \mathbf{Q}_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ \mathbf{Q}_{n1}; \mathbf{Q}_{n2}; \dots; \mathbf{Q}_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

где  $\mathbf{Q}_{ij}$  - алгебраические дополнения элемента  $q_{ij}$  матрицы  $\mathbf{Q}(p)$ .

Если в матрице передаточной функции для каждого элемента матрицы найти обратное преобразование Лапласа, то получится матрица весовых функций (матрица Коши).

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_{11}(t); \omega_{12}(t); \dots; \omega_{1k}(t) \\ \omega_{21}(t); \omega_{22}(t); \dots; \omega_{2k}(t) \\ \dots \dots \dots \\ \omega_{n1}(t); \omega_{n2}(t); \dots; \omega_{nk}(t) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Если в момент времени  $t=0$  на все  $k$  входов поступают управляющие воздействия  $u(t)$ , то изменение  $i$ -ой регулируемой величины может быть найдено посредством интеграла Дюамеля на основании принципа суперпозиции:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^k \int_0^t u_j(t) \omega_{ij}(t - \tau) d\tau \quad (2.18)$$

Аналогично одномерным системам, производя замену оператора  $p$  на оператор  $j\omega$  для каждого элемента матрицы передаточных функций (2.14), (2.15), получим матрицу комплексной передаточной функции.

$$\mathbf{W}_u(j\omega) = \begin{pmatrix} w_{11}(j\omega), w_{12}(j\omega), \dots, w_{1k}(j\omega) \\ w_{21}(j\omega), w_{22}(j\omega), \dots, w_{2k}(j\omega) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ w_{n1}(j\omega), w_{n2}(j\omega), \dots, w_{nk}(j\omega) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Если теперь положить, что одновременно на все входы многомерной системы поступают гармонические сигналы одинаковой частоты  $\omega$ , то АЧХ и ФЧХ  $i$ -ой регулируемой величины могут быть вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_i(\omega) &= \left| \sum_{j=1}^k w_{ij}(j\omega) \right|; \\ \varphi(\omega) &= \arg \left[ \sum_{j=1}^k w_{ij}(j\omega) \right] \end{aligned} \quad (2.20)$$

Т. е. сначала определяют частотную передаточную функцию по  $i$ -ому выходу как сумму комплексных элементов  $j$ -ой строки матрицы частотной передаточной функции всей системы, а затем АЧХ и ФЧХ находят как модуль и аргумент этой суммы комплексных элементов.

Также как и для одномерных систем, в многомерных системах одной и той же матрице передаточной функции может соответствовать несколько вариантов структурных схем и уравнений состояния. Т.е. по уравнениям состояния матрица передаточной функции может быть получена однозначно, обратное утверждение будет неверным. Для выяснения этой особенности многомерных систем рассмотрим основные свойства конечномерного векторного пространства.

### 2.3. Основные свойства конечномерного векторного пространства

Множество  $R$  элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$  называется векторным, или линейным, пространством, если для любых его элементов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  определена сумма  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in R$  и для



каждого элемента  $x \in R$  и для каждого числа  $\alpha$  определено произведение  $\alpha x \in R$ , причем выполнены следующие условия:

1.  $x + y = y + x$  для всех  $x, y \in R$
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  для всех  $x, y, z \in R$ .
3. Существует такой (нулевой) элемент  $0 \in R$ , что  $x + 0 = x$  для всех элементов  $x \in R$ .
4. Для каждого элемента  $x \in R$  существует такой элемент  $-x$  (называемый противоположными к  $x$ ), что  $x + (-x) = 0$
5.  $1 \bullet x = x$  для всех  $x$  принадлежавших  $R$ .
6.  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$  для всех  $\alpha, \beta \in F$  и  $x \in RR$ .
7.  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  для всех  $\alpha, \beta \in F$  и  $x \in R$ .
8.  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  для всех  $\alpha \in F$  и  $x, y \in R$ .

Элементы векторного пространства называются векторами.

Векторы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , векторного пространства  $R$  называются линейно зависимыми, если существуют такие числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , не равные одновременно нулю, что

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_k x_k = 0. \quad (2.21)$$

Векторы, не являющиеся линейно зависимыми, называются линейно независимыми, что выполняется, если уравнение (2.21) удовлетворяется только в случае равенства нулю всех скаляров  $a_i$ .

Критерий линейной зависимости множества векторов с действительными компонентами может быть выражен аналитически в виде определителя Грама или грамиана множества векторов. Умножая обе части уравнения (2.21) на  $x_1, x_2, \dots, x_k$  и образуя последовательные скалярные произведения, можно показать, что коэффициенты  $a_i$  должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$a_1 (x_i x_1) + a_2 (x_i x_2) + \dots + a_i (x_i x_i) + \dots + a_k (x_i x_k) = 0 \quad (2.22)$$

для  $i=1,2,\dots,k$ . Выражение  $(x_i, x_j)$  означает скалярное произведение векторов  $x_i$  на  $x_j$ . Эти уравнения выражают требование ортогональности левой части уравнения (2.21) одновременно к каждому из векторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Согласно правилу Крамера эта система  $k$  уравнений относительно  $k$  неизвестных коэффициентов  $a_i$  имеет нетривиальное решение только тогда, когда определитель Грама равен нулю.

$$G = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_k) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \dots & (x_2, x_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_k, x_1) & (x_k, x_2) & \dots & (x_k, x_k) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что множество векторов является линейно зависимым тогда и только тогда, когда его грамиан равен нулю. Эта теорема справедлива и для векторов с комплексными переменными, если в (2.23) скалярные произведения векторов заменить эрмитовыми скалярными произведениями.

Векторное пространство  $R$  называется  $n$ -мерным, если в нем можно найти  $n$  линейно независимых векторов, но больше чем  $n$  линейно независимых векторов оно не содержит.

Размерность пространства - это максимальное число содержащихся в нем линейно независимых векторов. Пространство, имеющее конечную размерность, называется конечномерным. Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов называется бесконечномерным.

Говорят, что множество векторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$  из векторного пространства  $R$  порождает  $R$ , если каждый вектор в  $R$  может быть записан в виде линейной комбинации векторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Это множество векторов называют порождающим множеством. Совокупность  $n$  линейно независимых векторов  $n$ -мерного векторного пространства  $R$  называется его базисом. Каждый вектор  $x_i$  линейного  $n$ -мерного пространства  $R$  можно представить, и притом единственным способом, в

виде линейной комбинации векторов базиса. Однако конечномерное векторное пространство может обладать различными базисами.

Пусть дано множество базисных векторов  $x_1, x_2, \dots, x_k$  для векторного пространства  $R$  и любой другой вектор  $y \neq 0$  из  $R$ , который может быть записан в виде линейной комбинации векторов  $x_i$

$$y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i. \quad (2.24)$$

Тогда, если из множества  $x_1, x_2, \dots, x_k$  исключить любой вектор  $x_i$ , для которого  $\lambda_i \neq 0$  и вектор  $y$  добавить в множество, то получится новое множество  $k$  векторов, которые тоже образуют базис для векторного пространства  $R$ .

Векторы из  $n$ -мерного векторного пространства  $R$  не равные нулю, называются ортогональными, если их скалярные произведения равны нулю. Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – ортогональная система векторов. Тогда

$$\begin{aligned} (x_i, x_j) &= 0 \text{ для } i \neq j; \\ (x_i, x_j) &= |x_i|^2 \text{ для } i = j. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Систему векторов называют ортогональной, если любые два вектора системы ортогональны друг другу. Векторы ортогональной системы линейно независимы.

Множество  $n$  взаимно ортогональных векторов единичной длины векторного пространства  $R$  образуют ортогональный базис этого пространства.

#### 2.4. Линейные преобразования в пространстве состояний

Пусть в векторном пространстве (пространстве состояний)  $R$  задан базис  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Этот базис может быть получен из другого базиса с помощью линейного преобразования

$$x_i = \sum_{j=1}^k t_{ij} y_j \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad (2.26)$$

$$\text{где } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1k} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{k1} & t_{k2} & \dots & t_{kk} \end{pmatrix}.$$

Можно, наоборот, выразить вектор  $\mathbf{y}$  через вектор  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} \quad (2.27)$$

Уравнения (2.26) и (2.27) являются уравнениями замены базиса в пространстве состояний  $R$  и, по сути, представляют уравнения перехода от одной системы координат к другой. Очевидно, что можно выбрать бесконечно большое число базисов или систем координат в пространстве состояний. При переходе к новому базису необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода  $\mathbf{T}$  была не вырожденной, что выполняется, если определитель этой матрицы не равен нулю  $|\mathbf{T}| \neq 0$ . Следовательно, между множеством координатных преобразований и множеством матриц  $\mathbf{T}$  существует взаимно однозначное соответствие при фиксированных базисах, соответствующих этим преобразованиям.

Выбор различных базисов рассматривался в п. 1.4, где на примере системы второго порядка были получены различные варианты структурных схем (обратная, параллельная и последовательная) имеющих различные виды уравнений состояния, но имеющие одинаковую передаточную функцию.

Используя линейные преобразования (2.26) можно отображать в пространство состояний системы и другие ее пространства (пространства управлений, возмущений и регулируемых координат), что и задается уравнениями связи (2.8).

При решении таких уравнений требуется вычисление свободных и вынужденных движений системы, что в конечном итоге приводит к необходимости решения системы однородных алгебраических уравнений вида:



Разложение этого определителя дает характеристическое уравнение системы или матрицы,

$$(-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + \dots + b_1(-\lambda) + b_0 = 0 \quad (2.32)$$

из которого могут найдены все значения  $\lambda$ . Если теперь подставить найденные значения  $\lambda_i$  в уравнение (2.30) и решить его, то вычисленные значения составляющих вектора  $x$  для каждого значения  $\lambda_i$  будут собственными векторами матрицы  $A$ .

Собственные векторы матрицы имеющей действительные и различные собственные значения обладают следующими важными свойствами:

1. Собственные векторы такой матрицы попарно ортогональны.
2. Собственные векторы матрицы  $n$  – го порядка порождают  $n$  – мерное векторное пространство
3. Собственные векторы матрицы  $n$  – го порядка образуют ортогональный базис  $n$  – мерного векторного пространства.

Знание собственных значений и векторов матрицы системы позволяет осуществлять линейные преобразования (2.26) в пространстве состояний, придавая различный вид этой матрице. В задачах управления наиболее часто используются следующие канонические виды матрицы  $A$  [5].

1. Диагональная каноническая форма

$$A_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

где  $\lambda_i$  - собственные различные значения матрицы  $A$

Диагональной канонической форме соответствует следующая структурная схема рис. 2.3.

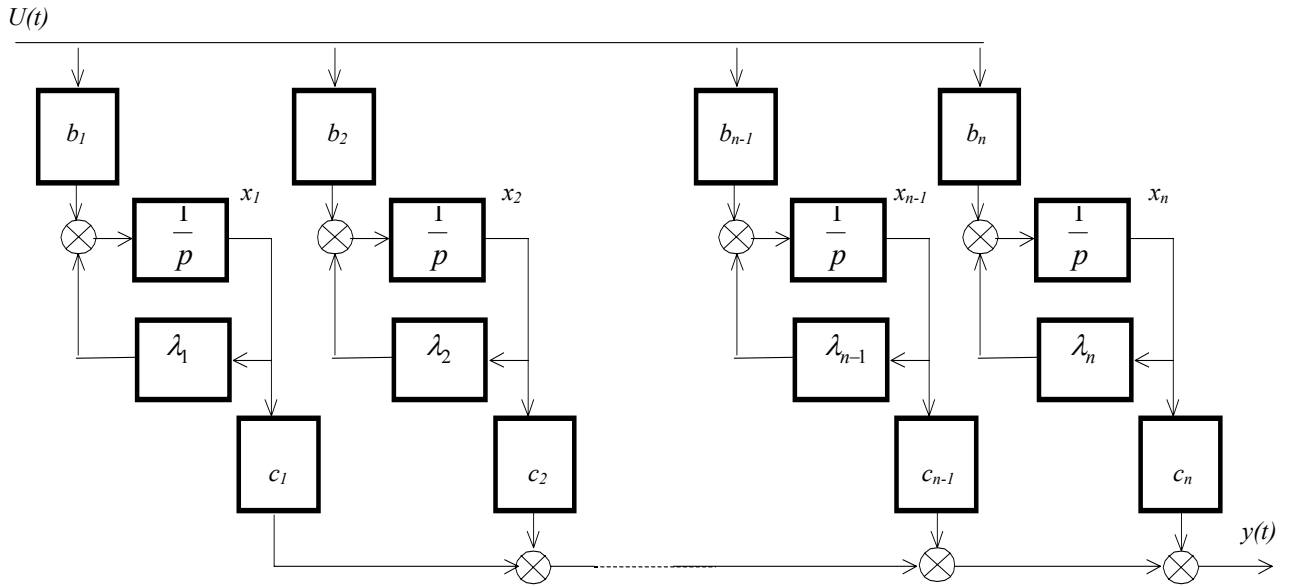


Рис. 2.3.

2. Каноническая форма управляемости

$$A_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_0 & -b_1 & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

где  $b_i$  – коэффициенты характеристического уравнения матрицы (2.32).

Структурная схема для канонической формы управляемости показана на рис 2.4.

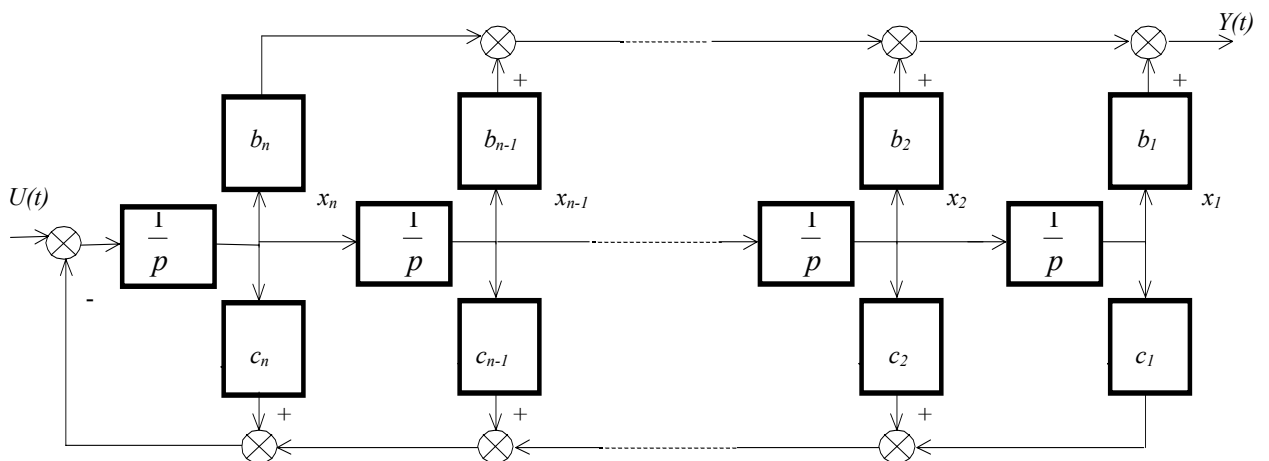


Рис. 2.4.

## 3. Каноническая форма наблюдаемости

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -b_0 \\ 1 & 0 & \dots & -b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Структурная схема для канонической формы наблюдаемости показана на рис 2.5

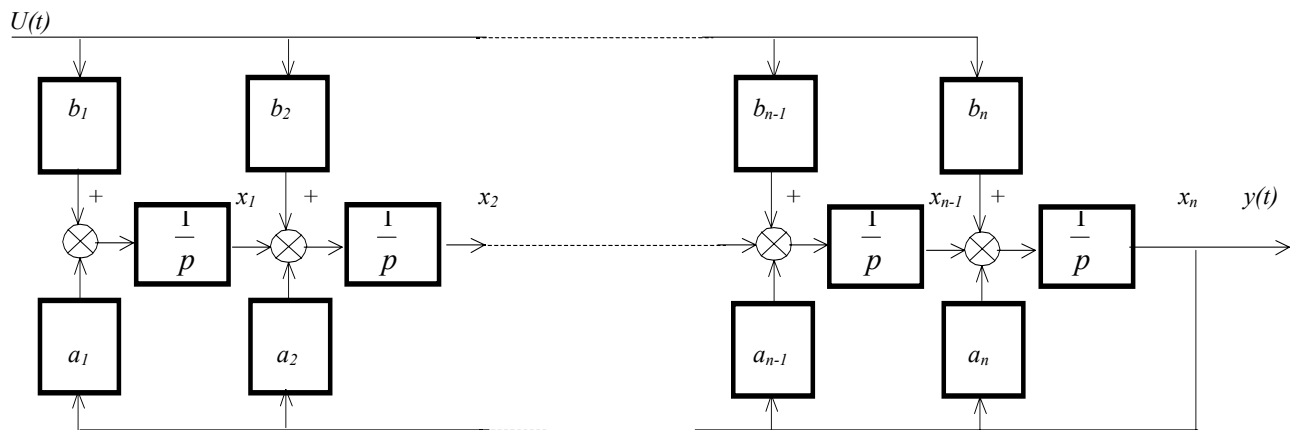


Рис. 2.5.

Наибольший интерес представляет получение диагональной канонической формы, так как все остальные формы легко получаются из нее путем линейных преобразований. Для диагонализации матрицы  $A$  используется следующее выражение

$$A_d = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = T^{-1} A T \quad (2.36)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - собственные значения матрицы  $A$ , а ее нормированные собственные векторы являются столбцами матрицы  $T$ . Условием нормирования является равенство единице модуля собственных векторов.

В качестве примера рассмотрим приведение многомерного объекта, задаваемого уравнением



$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}u_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{22}u_2; \\ y &= c_1x_1 + c_2x_2.\end{aligned}$$

к канонической диагональной форме.

Матрицы объекта равны

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,25 & -2,5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = (3 \quad 2).$$

Вычислим собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  из условия (2.31)

$$\begin{vmatrix} -0,5 - \lambda & 3 \\ -0,25 & -2,5 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая полученный определитель, запишем характеристическое уравнение объекта

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения или собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  равны

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2.$$

Найдем собственные векторы матрицы, подставляя в (2.30) вычисленные собственные значения. Для первого собственного значения имеем:

$$\begin{aligned}(-0,5 - \lambda_1)t_{11} + 3t_{21} &= 0; \\ -0,25t_{11} + (-2,5 - \lambda_1)t_{21} &= 0.\end{aligned}$$

При  $\lambda_1 = -1$  получаем следующую систему уравнений для вычисления первого собственного вектора

$$\begin{aligned}0,5t_{11} + 3t_{21} &= 0; \\ -0,25t_{11} - 1,5t_{21} &= 0.\end{aligned}$$

Откуда  $t_{11} = -6t_{21}$

Конкретные значения первого собственного вектора определяются условием нормировки

$$\sqrt{t_{11}^2 + t_{21}^2} = 1.$$

Подставляя сюда, решение уравнений  $t_{11} = -6t_{21}$  получим

$$t_{11} = \frac{6}{\sqrt{37}}; t_{21} = -\frac{1}{\sqrt{37}}.$$

Аналогично найдем и второй собственный вектор

$$t_{12} = \frac{2}{\sqrt{5}}; t_{22} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Зная собственные векторы можно записать выражение для матрицы  $\mathbf{T}$  задающей переход в новую систему координат

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу  $\mathbf{T}^{-1}$ , используя выражение (2.16)

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Не трудно убедиться, что

$$\mathbf{T} \times \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор обобщенных координат  $\bar{q}$  задается линейным преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{q}.$$

Подставляя его в уравнения объекта получим

$$\mathbf{T} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{q} + \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Умножая обе части уравнения на  $\mathbf{T}^{-1}$  слева будем иметь

$$\mathbf{I} \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{q} + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}$$

Матрица  $\mathbf{A}_d = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ , в соответствии с (2.36) будет иметь диагональный вид, где в главной диагонали стоят собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ . Действительно

$$\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,5 & 3 \\ -0,25 & -2,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{37}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{37}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Вычислим новую матрицу управления  $\mathbf{B}_d = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B}$

$$\mathbf{B}_d = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{3\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{37}}{4} & -3\sqrt{5} \\ -\frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{\sqrt{37}}{2} \end{pmatrix}$$

Тогда в новых координатах  $q_1, q_2$  уравнения объекта примут вид

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \lambda_1 q_1 + b_{o11} u_1 + b_{o12} u_2; \\ \frac{dq_2}{dt} &= \lambda_2 q_2 + b_{o21} u_1 + b_{o22} u_2. \end{aligned}$$

### 2.3. Понятие наблюдаемости многомерной системы

Наблюдаемость и управляемость характеризуют свойства многомерных систем и являются такими же важными понятиями, как устойчивость [2, 11].

Если устойчивость линейных систем однозначно определяется по коэффициентам матрицы передаточной функции, или матрицы  $\mathbf{A}$ , или по коэффициентам характеристического уравнения, то для оценки наблюдаемости необходимо наряду с матрицей  $\mathbf{A}$  знать также матрицу наблюдаемости  $\mathbf{C}$ . Аналогично

для оценки управляемости системы необходимо знать матрицу  $A$  и матрицу управляемости  $B$ .

Рассмотрим вначале понятие наблюдаемости. При автоматическом управлении предполагается, что наблюдение за системой или процессом сопровождается измерением обобщенных (фазовых) координат  $X_i$  и в понятие наблюдение и измерение вкладывается практически одинаковый смысл. В отличие от тождественности понятий наблюдения и измерения понятие наблюдаемость и измеримость в теории управления имеют различное содержание.

Под измеримостью понимается возможность прямого измерения той или иной фазовой координаты. В этом случае речь идет о непосредственной наблюдаемости. Под наблюдаемостью же понимается возможность как косвенного, так и прямого измерения фазовых координат на основе прямого измерения других, как правило, регулируемых величин.

Общая постановка задачи определения состояния системы по наблюдениям заключается в следующем. Пусть получено посредством наблюдения (измерения) множество  $Y$ , связанное известной функциональной зависимостью с множеством  $X$ , например  $Y=CX$ , принадлежащему пространству состояний системы с заданной математической моделью в форме Коши. Требуется определить  $X$  или некоторое его подмножество  $X_n \subset X$ .

В зависимости от видов множеств  $X$  и  $Y$ , а также уравнений наблюдаемого процесса, происходящего в системе управления, возможны следующие задачи наблюдения:

1. Множества  $X$  и  $Y$  имеют одинаковую размерность, т. е. имеет место случай полнокомпонентного мгновенного измерения.

Задача наблюдаемости в этом случае сводится к решению системы, в общем случае, алгебраических уравнений  $n$ -ого порядка с  $n$  неизвестными.

2. Измеряется одна компонента вектора  $Y$  и  $(n-1)$  её производные. Этот случай аналогичен случаю 1. Однако он не имеет практического значения т. к. невозможно точно измерить производные высокого порядка.

3. Размерность множества  $Y$  меньше размерности множества  $X$ . Наиболее распространённая постановка задачи наблюдаемости. Очевидно, что решение этой задачи возможно только на основании априорной информации о работе системы, т. е. необходима математическая модель системы.

Если в этом случае возможно определение полного вектора состояния системы, то говорят о полной наблюдаемости и система называется вполне наблюдаемой.

Если существует возможность восстановления только некоторого подмножества из множества  $X$ , а именно, части компонент обобщенных координат, то имеет место неполная наблюдаемость, а система называется не вполне наблюдаемой.

Для количественной оценки степени наблюдаемости вводятся критерии по которым оценивается эта степень.

Наиболее простой вид критерия получается для первого случая полнокомпонентного измерения вектора обобщенных координат. Этот критерий соответствует условию разрешимости системы из  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.

Для линейных систем уравнений это условие формулируется в следующем виде. Ранг матрицы наблюдаемости  $C$  системы должен быть равен порядку системы.

Рассмотрим теперь третий случай. Так как наблюдаемость является внутренним свойством системы, то ограничимся определением условий наблюдаемости для свободного движения. При свободном движении уравнения (2.8) системы преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax; \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Продифференцируем  $n-1$  раз второе уравнение (2.37) и подставим в полученные выражения для производных первое уравнение (2.37). В результате получим систему из  $n$  уравнений для вычисления  $\bar{x}$ .

$$\begin{aligned} y &= \mathbf{C}\mathbf{x}; \\ \dot{y} &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}; \\ &\dots\dots\dots \\ y^{n-1} &= \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Система уравнений (2.38) будет иметь единственное решение в том случае, если ранг матрицы наблюдаемости  $\mathbf{V}$  этой системы будет равен  $n$ .

Матрица наблюдаемости имеет вид

$$\mathbf{V} = [\mathbf{C}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T \dots (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T], \quad (3.39)$$

а ее ранг должен быть равен порядку системы

$$\text{Rank}(\mathbf{V}) = \text{Rank}(\mathbf{C}^T \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T (\mathbf{A}^T)^2 \mathbf{C}^T \dots (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T) = n. \quad (2.40)$$

Это необходимое и достаточное условие наблюдаемости Калмана.

Рассмотрим простейший пример. Пусть система управления описывается дифференциальными уравнениями вида:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} + b_1 u; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u; \\ y &= cx_1. \end{aligned}$$

Матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; & \mathbf{C} &= (c \quad 0); \\ \mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}; & \mathbf{C}^T &= \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица наблюдаемости  $\mathbf{V}$  запишется в следующем виде, согласно (2.39):

$$\mathbf{V} = (\mathbf{C}^T \mathbf{A}^T \times \mathbf{C}^T)$$

Подставляя сюда выражения для транспонированных матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  получим:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} c & a_{11} & a_{21} \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$$

Выполняя перемножение матриц, найдем, что

$$V = \begin{pmatrix} c & a_{11}c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы  $V$  равен 1, следовательно рассматриваемая система не вполне наблюдаема и зная из эксперимента  $y$  невозможно вычислить (наблюдать) координату  $x_2$ .

#### 2.4. Понятие управляемости многомерной системы

Понятие управляемости связано с переводом системы посредством управления из одного состояния в другое. Пусть в пространстве состояний  $X$  заданы два подмножества  $\Gamma_1 \subset X$  и  $\Gamma_2 \subset X$ . Рассматриваемая система будет управляемой, если существует такое управление  $\mathbf{U}(t) = (U_1, U_2, \dots, U_k)^T$ , определенное на конечном интервале времени  $0 \leq t \leq T$ , которое переводит систему в пространстве  $X$  из подмножества  $\Gamma_1$  в подмножество  $\Gamma_2$ .

Возможны частные случаи управляемости когда:

1. Пространство состояний  $X$  ограничено замкнутой областью;
2. В процессе управления осуществляется переход из подмножества  $\Gamma_1$  в заданную точку пространства состояний;
3. В процессе управления осуществляется переход из заданной точки пространства состояний в заданное подмножество  $\Gamma_1$ ;
4. В процессе управления осуществляется переход из окрестности одной точки пространства состояния в окрестность другой точки.

В случае неполной управляемости размерности подобласти  $\Gamma_1$  меньше размерности пространства состояния.

Кроме этого, управление может происходить при ограничениях, накладываемых на управляющие и управляемые переменные, что усложняет определение управляемости. В общем случае задача управляемости не разрешена до настоящего времени. Критерии управляемости разработаны только для частных случаев управления линейными системами.

Для линейной стационарной системы можно записать:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad (2.41)$$

где матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  постоянны.

При отсутствии ограничений в пространстве состояний и пространстве управлений, управляемость зависит только от коэффициентов матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

Для управляемой системы справедливо следующее определение. Если для произвольно заданных  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{x}_1$ , существует управление  $\mathbf{u}(t)$ , переводящее систему (2.41) за некоторое время  $t_1 - t_0$  из состояния  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  в состояние  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ , то система называется вполне управляемой.

Пусть решение уравнения (2.41) задано в виде суммы общего решения однородного уравнения  $x_{ce}$  и частного решения  $x_e$  неоднородного уравнения

$$x = x_{ce} + x_e. \quad (2.42)$$

Для управляемости системы необходимо чтобы решение (2.41) было устойчивым, что будет выполняться в том случае если:

$$\lim_{t \leftarrow \infty} x_{ce} = 0. \quad (2.43)$$

Следовательно, для оценки управляемости системы можно ограничиться рассмотрением статических режимов. В этом случае исходная система уравнений преобразуется к виду:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} = 0 \quad (2.44)$$

В том случае если размерность вектора  $\mathbf{u}(t)$  больше или равна размерности вектора  $\mathbf{x}(t)$ , то по завершении управления, когда вектор  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$  система (2.41)



будет иметь единственное решение в то и только том случае если ранг матрицы  $\mathbf{B}$  равен  $n$ . Если размерность вектора  $\mathbf{u}(t)$  меньше размерности вектора  $\mathbf{x}(t)$ , то необходимое и достаточное условие полной управляемости по Калману примет вид:

$$\text{Rank}(\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{A}^2\mathbf{B})\dots(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})) = n, \quad (2.44)$$

где  $\mathbf{U} = [\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{A}^2\mathbf{B})\dots(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})]$  - матрица управляемости.

В противном случае система не вполне управляема. Причем степень неуправляемости может быть по величине  $q$  равной

$$q = n - \text{Rank}(\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{B})(\mathbf{A}^2\mathbf{B})\dots(\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})) \quad (2.45)$$

В качестве примера рассмотрим критерий управляемости двигателя постоянного тока с двухзонным регулированием (одновременное регулирование, как по цепи якоря, так и по цепи возбуждения).

Система уравнений для рассматриваемого случая будет выглядеть:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{u_1 - R_b x_1}{L_b}; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{u_2 - k\omega_n x_1 - R x_2 - kI_{bn} x_3}{L}; \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{kI_n x_1 + kI_{bn} x_2}{J}. \end{aligned}$$

Или после преобразований

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + b_{11}u_1; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{22}u_2; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2; \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Запишем выражение для матрицы  $\mathbf{U}$ , в соответствии с формулой (2.44).

$$U = \left( \left( \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

После перемножения матриц и вычисления ранга получим, что  $Rank(U) = 3$ , т. е. двигатель постоянного тока при двухзонном регулировании является вполне управляемым. Самостоятельно можно убедиться, что при раздельном управлении двигателем по цепи якоря, или цепи возбуждения система также будет управляемой.

Управляемость двигателя постоянного тока предполагает, что в результате соответствующего изменения напряжения возбуждения или якоря можно получить любые, наперед заданные значения обобщенных координат двигателя (тока, скорости и угла поворота) из области их допустимых значений.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

#### 3.1. Устойчивость систем в пространстве состояний.

Первая теорема Ляпунова.

Пусть система управления описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в форме Коши:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}, t); \\ \mathbf{y} &= \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ \mathbf{u} &= \psi(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Так устойчивость является внутренним свойством системы, то на нее не оказывают влияние не управляющие, не возмущающее воздействия.

Кроме того, ограничимся рассмотрением устойчивости стационарных систем, для которых все ее параметры не зависят от времени.

С учетом этих допущений исходную систему можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t).\tag{3.2}$$

Решение этого векторного дифференциального уравнения при некоторых начальных условиях  $\mathbf{x}(t_0)$  имеет вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t).$$

Полученное решение описывает траекторию движения системы в пространстве состояний, а само движение называется невозмущенным движением.

Если теперь решить систему при других начальных условиях  $\tilde{\mathbf{x}}(t_0)$ , отклоняющихся от  $\mathbf{x}(t_0)$  на незначительную величину  $\delta$ , то ее решение будет называться возмущенным движением и запишется в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1(t).$$

Введём отклонение координат  $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ , характеризующее разность между возмущенным и невозмущенным движениями системы. Выражая  $\mathbf{x}_1$  через  $\mathbf{x}_0$  и  $\Delta \mathbf{x}$ , после подстановки его в (3.2) получим дифференциальное уравнение системы записанное для отклонений:

$$\frac{d(\Delta \mathbf{x})}{dt} = F(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - F(\mathbf{x}_0). \quad (3.3)$$

Это уравнение возмущенного движения. Его тривиальное решение  $\Delta \mathbf{x} = 0$  соответствует невозмущенному движению, так как в этом случае  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1$ .

Начальные значения  $\Delta \mathbf{x}(t_0)$  носят название возмущений. Решение уравнения (3.3) при  $\Delta \mathbf{x} \neq 0$  представляет собой возмущенное движение.

А. М. Ляпунов дал следующее определение устойчивости. Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к переменным  $\mathbf{x}$ , если при всяком заданном положительном числе  $A^2$ , как бы мало оно не было, можно выбрать другое положительное число  $\delta^2$  так, что для всех возмущений, удовлетворяющих условию:

$$|\Delta \mathbf{x}(t_0)| \leq \delta \quad (3.4)$$

возмущенное движение (3.3) будет в промежутке времени  $t_0 \leq t \leq \infty$  удовлетворять неравенству:

$$|\Delta \mathbf{x}(t)| \leq A \quad (3.5)$$

Если с течением времени  $\Delta \mathbf{x}(t)$  стремится к нулю, то система называется асимптотически устойчивой.

Геометрическая интерпретация устойчивости показана на рис. 3.1.

Отметим, что условие устойчивости, доказанное Ляпуновым будет справедливо, если имеется возможность перехода к дифференциальным уравнениям записанным в отклонениях (3.3). Очевидно, что такой переход возможен только в случае линейных или линеаризуемых систем, причем линеаризация осуще-

ствляется в окрестностях точки невозмущенного движения при малых отклонениях  $\Delta x$ .

Линеаризуя (3.3), можно записать:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \psi(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

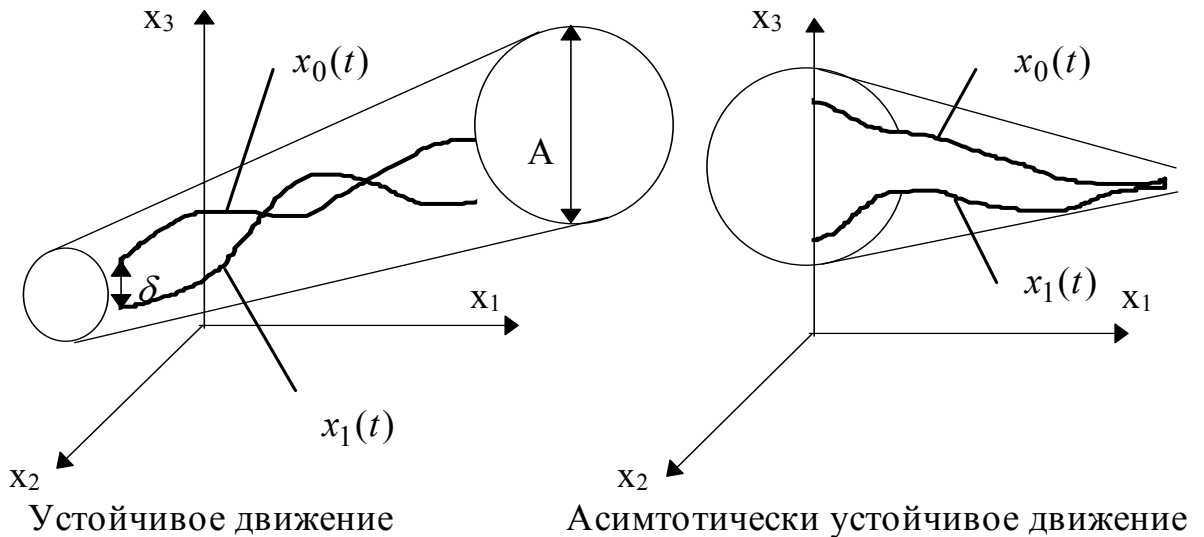


Рис 3.1.

Первая теорема Ляпунова дает определение достаточное условие устойчивости при малых отклонениях системы от ее невозмущенного движения, или определение устойчивости "в малом" и формулируется следующим образом:

Пусть все корни характеристического уравнения линеаризованной системы (3.6), без учета второго слагаемого  $\psi_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n)$ , имеют отрицательную действительную часть и все функции  $\psi_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n)$  удовлетворяют условию

$$|\psi_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq M \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2} + \alpha}, \quad \text{причем } M - \text{постоянная и } \alpha > 0.$$

Тогда тривиальное решение системы (3.2) устойчиво.

Наиболее просто можно судить об устойчивости линейных систем.

Для них понятие устойчивости "в малом" и устойчивости в большом, или абсолютной устойчивости совпадают. Если система устойчива "в малом", то она устойчива и в большом.

В случае нелинейной системы с гладкими нелинейностями Ляпуновым были доказаны следующие теоремы:

1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то реальная система будет также устойчивой. Малые нелинейные члены не могут нарушить устойчивость системы.

2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то реальная система также будет неустойчивой. Малые нелинейные члены не могут сделать ее устойчивой.

3. При наличии нулевых или чисто мнимых корней, поведение реальной системы не всегда даже качественно определяется ее линеаризованными уравнениями. Малые нелинейные члены могут коренным образом изменить характер переходного процесса.

Следует иметь в виду что данные теоремы Ляпунова сформулированы для устойчивости "в малом" и для нелинейных систем с гладкими нелинейностями, которые могут быть линеаризованы путем разложения в ряд Тейлора.

Для определения устойчивости нелинейных систем с нелинейными статическими характеристиками, имеющими точки разрыва, или для определения устойчивости нелинейных систем "в большом" используется прямой метод Ляпунова, или вторая теорема Ляпунова.

### 3.2 Устойчивость линейных систем.

#### Алгебраические критерии устойчивости



Решая эту систему можно найти  $x_i$ . Известно, что нетривиальное решение такой системы будет при условии равенство нулю главного определителя системы

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda_n \end{vmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

Это и будет характеристическое уравнение системы, а  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  являются корнями характеристического уравнения.

Получив характеристическое уравнение системы можно определить устойчивость по корням этого уравнения. Для этого запишем общее решение системы (3.8)

$$X_{CBi} = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}.$$

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_{CB} = 0.$$

Это условие выполняется в случае, если все корни характеристического уравнения будут "левыми", т.е. будут иметь отрицательные действительные части и располагаться слева от мнимой оси комплексной плоскости.

Непосредственное применение необходимого и достаточного условия, требующее решение характеристического уравнения, просто лишь для систем первого и второго порядков, менее удобно в случае третьего и четвертого порядков, а для систем более высоких порядков является довольно трудоемкой задачей. Однако, чтобы судить о том, удовлетворяет ли линейная система необходимому и достаточному условию устойчивости, нет надобности находить корни характе-



ристического уравнения: достаточно убедиться в том, что их вещественные части отрицательны. Для этого служат алгебраические критерии, позволяющие судить об устойчивости линейной системы по коэффициентам ее характеристического уравнения.

Рассмотрим характеристическое уравнение вида

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (3.12)$$

все коэффициенты которого вещественны.

В конце 19 века с необходимостью определения устойчивости систем высокого порядка встретился словацкий инженер Стодола выдающийся конструктор паровых турбин, работающий в Швейцарии. По его предложению швейцарский математик Гурвиц в 1893 г. нашел способ, позволяющий достаточно просто определить по коэффициентам характеристического уравнения, отрицательны ли вещественные части его корней. Для этого составляется определитель Гурвица

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}, \quad (3.13)$$

по диагонали которого располагаются коэффициенты характеристического уравнения от  $a_1$  до  $a_n$ . Выше коэффициента, стоящего по диагонали, в каждом столбце пишутся подряд старшие по индексу коэффициенты, а ниже - младшие. Затем составляются все диагональные миноры определителя:

$$D1 = a_1;$$

$$D2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix};$$

$$D3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

и т. д. Критерий Гурвица требует, чтобы у системы, для которой соблюдается необходимое и достаточное условие устойчивости, выполнялось условие

$$D_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n.$$

Это легко проверить с помощью формул Виета, задаваясь корнями с отрицательной вещественной частью.

Применим критерий Гурвица к системе третьего порядка с характеристическим уравнением

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

для которой определитель (3.12) принимает вид:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда

$$D_1 = a_1;$$

$$D_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3;$$

$$D_3 = a_3 D_2.$$

Из условия  $D_1 > 0$  находим  $a_1 > 0$ . При этом из условия  $D_2 > 0$  и  $D_3 > 0$  получаем  $a_3 > 0$ . Тогда из условия  $D_2 > 0$  следует, что  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

Таким образом, определители  $D_1, D_2, D_3$  будут положительными, как требует критерий Гурвица, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны и между ними имеет место соотношение  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

### 3.3. Частотные критерии.

Применение критериев Гурвица и Рауса к системам высокого порядка требует длительных вычислений. В этих случаях имеют преимущества методы ис-

следования устойчивости по частотным характеристикам. С помощью этих методов формулируются частотные критерии устойчивости.

Частотные характеристики можно получить, переходя от преобразования Лапласа, к преобразованию Фурье, путем замены оператора Лапласа  $p$  на комплексный оператор частоты  $j\omega$ . Рассмотрим отдельно левую часть характеристического уравнения (3.12), представляющую некоторый вектор на комплексной плоскости корней.

Этот вектор, называется характеристическим, и имеет  $n$  составляющих вида  $p - p_k$ , где  $p_k$  - корни характеристического уравнения. Делая подстановку  $p = j\omega$ , составляющие характеристического вектора можно представить в виде  $j\omega - p_k$ , а общее его выражение определяется произведением

$$a_0 \prod_{k=1}^n (j\omega - p_k), \quad (3.14)$$

где  $n$ - степень характеристического уравнения.

Рассмотрим две составляющие характеристического вектора (3.14), соответствующие паре комплексно-сопряженных корней:

$$\begin{aligned} p_k &= s_k + j\omega_k; \\ p_{k+1} &= s_k - j\omega_k, \end{aligned}$$

где  $s_k < 0$ , так что эти корни удовлетворяют необходимому и достаточному условию устойчивости.

Нанеся их на плоскость корней (рис. 3.2), построим векторы  $j\omega - p_k$  и  $j\omega - p_{k+1}$ . Исследуем, как изменяется положение этих векторов при изменении  $\omega$  от 0 до бесконечности.

Очевидно, что вектор  $j\omega - p_k$  повернется на угол  $\frac{\pi}{2} + q$ , где  $q$  - показанный на рис. 3.2 угол между вектором  $P_k$  и отрицательным направлением оси абсцисс. Вектор  $j\omega - p_{k+1}$  повернется в том же случае на угол  $\frac{\pi}{2} - q$ . Эти повороты рассматриваемых векторов изменяют аргумент характеристического вектора на угол

$$\frac{\pi}{2} + q + \frac{\pi}{2} - q = \pi,$$

так что при изменении частоты  $\omega$  от 0 до бесконечности на каждый корень приходится изменение аргумента на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

То же самое будет и в случае вещественных корней, для которых  $q=0$ , за

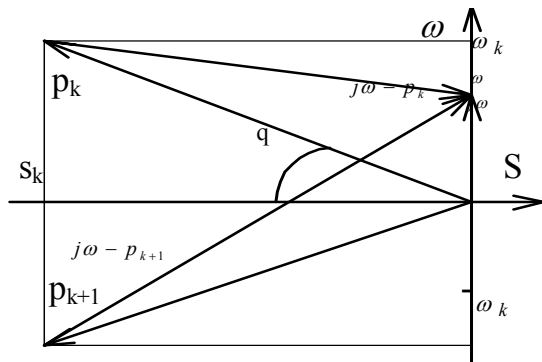


Рис. 3.2

исключением нулевых корней, которые не вызывают изменение аргумента характеристического вектора. Чисто мнимые корни изменяют аргумент характеристического вектора так, что при изменении частоты в указанных пределах положительный корень дает  $+\pi$ , а отрицательный - 0. Таким образом, на каждый корень приходится изменение аргумента на угол  $\frac{\pi}{2}$ , но знак этого изменения оказывается неопределенным.

Положим теперь, что  $S_k > 0$ , так что необходимое и достаточное условие устойчивости не удовлетворяется. Нетрудно убедиться, что в этом случае при изменении частоты в тех же пределах на каждый корень будет приходиться изменение аргумента характеристического вектора, равное  $-\frac{\pi}{2}$  за исключением нулевых и чисто мнимых корней.

Чтобы построить характеристический вектор на его комплексной плоскости, необходимо отложить по осям координат его вещественную и мнимые части  $U$  и  $V$ , которые получим после подстановки  $p = j\omega$  в левую часть характеристического уравнения, если отделим мнимые члены от вещественных. Тогда левая часть характеристического уравнения будет представлять собой вектор вида:

$$M(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (3.15)$$

где,

$$\begin{aligned} U(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \dots \\ V(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned} \quad (3.16)$$

Для каждой из составляющих рассмотренного выше характеристического вектора (3.14)  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  равны соответственно ее вещественной и мнимой частям. Например, корню характеристического уравнения  $P_1 = -a$  соответствует единственная в этом случае составляющая характеристического вектора, построенная на рис. 3.3 а.

Характеристический вектор, построенный на рис. 3.3 а показан на плоскости  $U, V$  на рисунке 3.3 б. В обоих случаях он одинаков и равен:

$$j\omega - p_1 = a + j\omega.$$

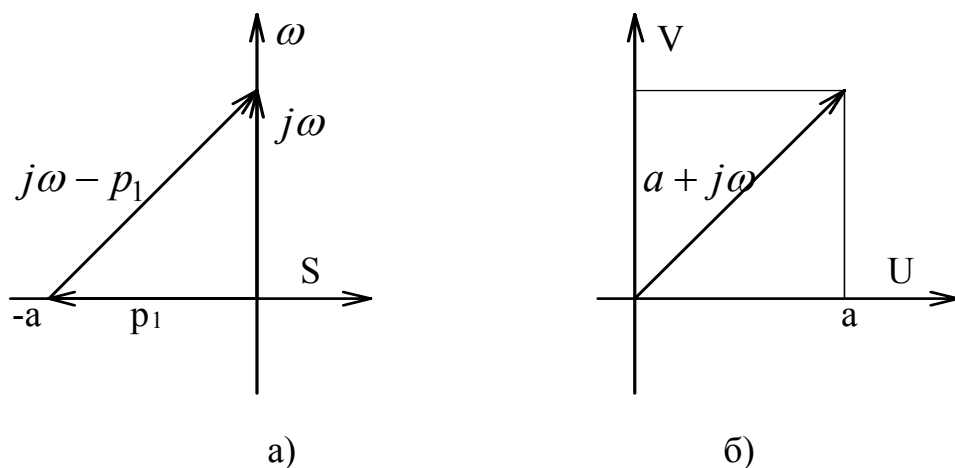


Рис. 3.3

Таким образом, при изменении частоты  $\omega$  вектор (3.15) будет вести себя так же, как характеристический вектор (3.14), и его аргумент будет также изме-

няться за счет каждого корня характеристического уравнения, как это найдено выше для аргумента характеристического вектора.

Каждому значению частоты  $\omega$  соответствует пара значений  $U$  и  $V$ . Принимая  $U$  и  $V$  за прямоугольные координаты, можно построить на их плоскости кривые, каждой точке которой будет соответствовать некоторое значение  $\omega$ . Эта кривая называется годографом Михайлова.

Рассмотрим изменение аргумента вектора (3.15) при изменении частоты  $\omega$  от 0 до бесконечности. Если все  $n$  корней характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости, то при таком изменении частоты аргумент вектора Михайлова,

изменится на угол  $\frac{n\pi}{2}$ , как установлено выше. Следовательно, необходимое и достаточное условие устойчивости системы можно интерпретировать так:

при изменении частоты от 0 до бесконечности вектор Михайлова совершает поворот на угол  $\frac{n\pi}{2}$ , где  $n$  - порядок системы. Это первая формулировка критерия устойчивости, называемого критерием Михайлова.

Рассматривая годограф, получаемый при указанном повороте вектора Михайлова, найдем, что при изменении частоты от 0 до бесконечности годограф устойчивой системы должен окружать начало координат, пересекая  $n$  квадрантов; это - вторая формулировка критерия Михайлова.

Рассматривая годограф, получаемый при указанном повороте вектора Михайлова, найдем, что при изменении частоты от 0 до бесконечности годограф устойчивой системы должен окружать начало координат, пересекая  $n$  квадрантов; это - вторая формулировка критерия Михайлова.

На рис. 3.4 показан вид годографов для систем различного порядка.

Как видно из рис 3.4 координаты  $U$  и  $V$  годографа по очереди меняют знак, проходя через 0. Отсюда третья формулировка критерия Михайлова: система устойчива, если при изменении частоты от 0 до бесконечности координаты годографа поочередно проходят через нуль, в общем  $n$  раз. Если характеристическое уравнение имеет нулевой корень, то изменение аргумента вектора Михайлова при изменении частоты от 0 до бесконечности на  $\frac{\pi}{2}$  меньше требуемого для устойчивости системы. При этом  $a_n=0$  и годограф начинается в начале координат. При

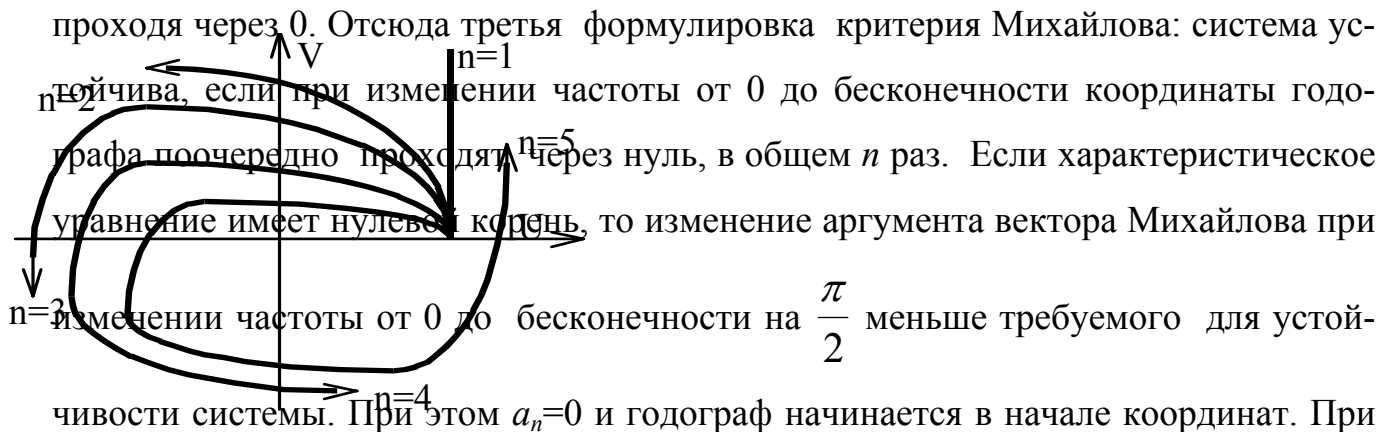


Рис. 3.4

наличии пары чисто мнимых корней годограф проходит через начало координат. В этих случаях, поскольку имеются корни, лежащие на мнимой оси система находится на границе устойчивости, если только все остальные корни лежат в левой полуплоскости.

Рассмотрим теперь влияние охвата отрицательной обратной связью на устойчивость системы. Пусть разомкнутая система (рис. 3.5) а имеет передаточную функцию

$$W_p(p) = k \frac{P_1(p)}{P_2(p)} \quad (3.17)$$

и, следовательно, характеристическое уравнение будет равно знаменателю передаточной функции.

$$P_2(p) = 0. \quad (3.18)$$

Вектор Михайлова для разомкнутой системы имеет вид:

$$M(j\omega) = P_2(j\omega). \quad (3.19)$$

Предположим, что характеристическое уравнение (3.18) имеет  $m$  корней с положительной действительной частью, т.е. находящихся в правой полуплоскости.

Тогда при изменении частоты от 0 до бесконечности аргумент вектора (3.19) изменяется за счет этих корней на угол  $-\frac{m\pi}{2}$ , а за счет корней находящихся в левой полуплоскости на угол  $-\frac{(n-m)\pi}{2}$ . Полное изменение аргумента вектора Михайлова при этом будет равно:

$$\frac{(n-m)\pi}{2} - \frac{m\pi}{2} = \frac{(n-2m)\pi}{2}.$$

После охвата системы (рис. 3.5 б) отрицательной единичной обратной связью передаточная функция системы имеет вид:

$$W_z(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}, \quad (3.20)$$

а характеристическое уравнение:

$$1 + W_p(p) = 0 \quad (3.21)$$

откуда:

$$kP_1(p) + P_2(p) = 0 \quad (3.22)$$

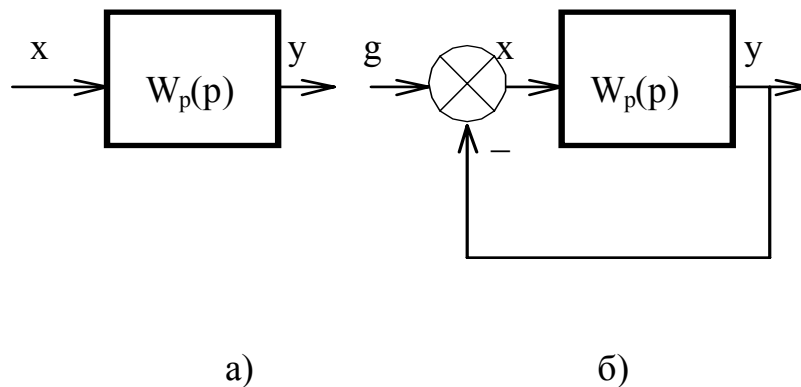


Рис. 3.5.

Теперь для замкнутой системы выражение для вектора Михайлова запишется в виде:

$$M_z(j\omega) = kP_1(j\omega) + P_2(j\omega). \quad (3.23)$$

Чтобы замкнутая система была устойчивой, все  $n$  корней уравнения (3.22) должны находиться в левой полуплоскости. Тогда при изменении частоты от 0 до бесконечности до аргумент вектора (3.23) изменится на  $\frac{n\pi}{2}$ .

Введем вектор, представляющий собой после подстановки  $p = j\omega$  левую часть уравнения (3.21):

$$N(j\omega) = 1 + W_p(j\omega). \quad (3.24)$$

Этот вектор называется вектором Найквиста. Принимая во внимание (3.17), имеем:



$$N(j\omega) = \frac{kP_1(j\omega) + P_2(j\omega)}{P_2(j\omega)}$$

Отсюда, согласно (3.23) и (3.19),

$$N(j\omega) = \frac{M_z(j\omega)}{M_p(j\omega)} \quad (3.25)$$

т.е. вектор Найквиста равен частному от деления вектора Михайлова замкнутой системы на вектор Михайлова разомкнутой системы. Следовательно, аргумент вектора Найквиста равен разности аргументов векторов Михайлова замкнутой и разомкнутой систем. При изменении частоты от 0 до бесконечности изменение

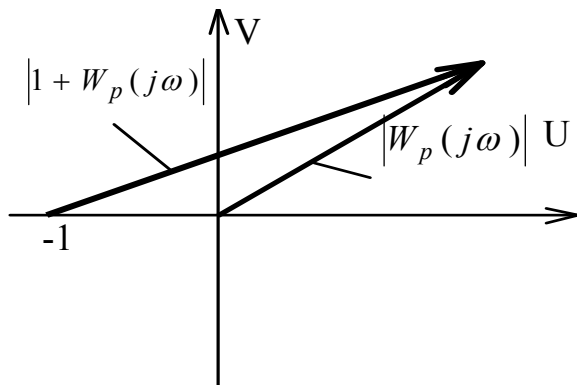


Рис. 3.6

аргумента вектора Найквиста будет равно:

$$\frac{n\pi}{2} - \frac{(n-2m)\pi}{2} = m\pi.$$

Отсюда следует первая формулировка критерия Найквиста: если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет  $m$  корней в правой полуплоскости, то аргумент вектора  $N(j\omega)$  устойчивой

замкнутой системы должен изменяться на угол  $m\pi$  при изменении частоты от 0 до бесконечности.

Для графической интерпретации этого критерия построим годограф вектора Найквиста по амплитудно-фазо-частотной характеристике, данной для той же системы в разомкнутом состоянии. С этой целью представим частотную характеристику  $W_p(j\omega)$  в форме  $W_p(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$  и построим ее в прямоугольных координатах  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$ . Каждой точке  $(U, V)$ , получаемой при этом кривой, будет соответствовать некоторая частота  $\omega$ , а вектор, имеющий начало в начале координат и конец в этой точке, будет равен по величине модулю

частотной характеристике при той же частоте:  $|W_p(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$  (рис. 3.6).

Теперь построим вектор, начинающийся в точке  $(-1, j0)$ , и кончающийся в рассмотренной точке  $(U, V)$ . Модуль этого вектора, как видно из рисунка (3.6), равен  $\sqrt{(1+U)^2 + V^2} = |1 + W_p(j\omega)|$  откуда следует, согласно (3.14), что это - вектор Найквиста  $N(j\omega)$ . Таким образом, частотная характеристика разомкнутой системы, построенная в координатах  $U, V$ , является годографом вектора Найквиста в координатах  $U+1, V$ . При изменении частоты  $\omega$  вектор  $N(j\omega)$  замкнутой системы обегает своим концом частотную характеристику разомкнутой системы, имея начало в точке  $(-1, 0)$ .

Если разомкнутая система устойчива, то  $m=0$ , и изменение аргумента вектора  $N(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до бесконечности должно быть равно нулю, чтобы замкнутая система была также устойчивой. Это условие будет соблюдено, если частотная характеристика разомкнутой системы не охватывает точку  $(-1, 0)$ , как показано на рисунке 3.7.

Если же  $m>0$ , то частотная характеристика должна охватывать точку  $(-1, 0)$ , чтобы при изменении частоты от 0 до бесконечности вектор  $N(j\omega)$  делал поворот на угол  $m\pi$ , тогда замыкание сделает систему устойчивой. На рис. 3.8 показан пример, в котором  $m=2$ , но частотная характеристика разомкнутой системы охватывает точку  $(-1, 0)$  так, что при изменении частоты от 0 до бесконечности вектор  $N(j\omega)$  делает поворот на  $2\pi$ . Это значит, что замкнутая система устойчива.

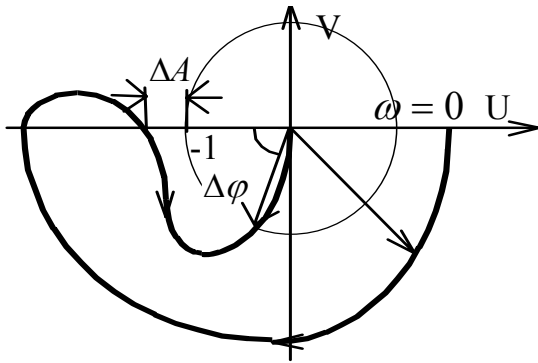


Рис. 3.7

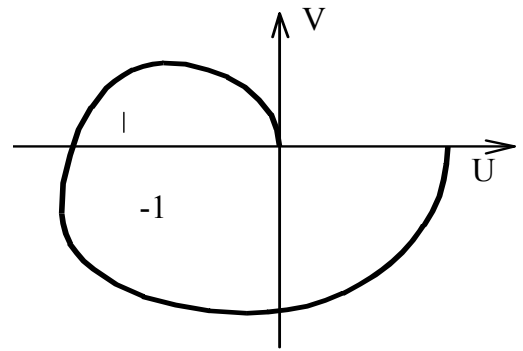


Рис. 3.8

Рассмотрим систему, устойчивую в разомкнутом состоянии. По приведенной уже формулировке критерия Найквиста система будет устойчивой и в замкнутом состоянии, если частотная характеристика разомкнутой системы при  $|W_p(p)| \geq 1$  пересекает вещественную ось четное число раз, поочередно меняя знак производной частоты по углу или угла по частоте при этих пересечениях, либо таких пересечений (при модуле, большем единицы) не имеет. Это - вторая формулировка критерия Найквиста.

Случай четного числа пересечений показан на рис. 3.7. Случай отсутствия пересечений левее точки  $(-1,0)$  показан на рис. 3.9, где представлена частотная характеристика устойчивой разомкнутой системы, остающейся устойчивой и после замыкания.

Рассмотрим рис. 3.8, предполагая, что часть характеристики, проходящая левее точки  $(-1,0)$ , приближается к этой точке. Пока эта часть характеристики остается левее точки  $(-1,0)$ , замкнутая система сохраняет устойчивость; но система теряет устойчивость, как только характеристика оказывается правее этой точки. Очевидно, поэтому, в случае характеристики, проходящей через точку  $(-1,0)$ , замкнутая система будет находиться на границе устойчивости. Тот же вывод легко сделать из рассмотрения случаев, представленных на рис. 3.7 и 3.9.

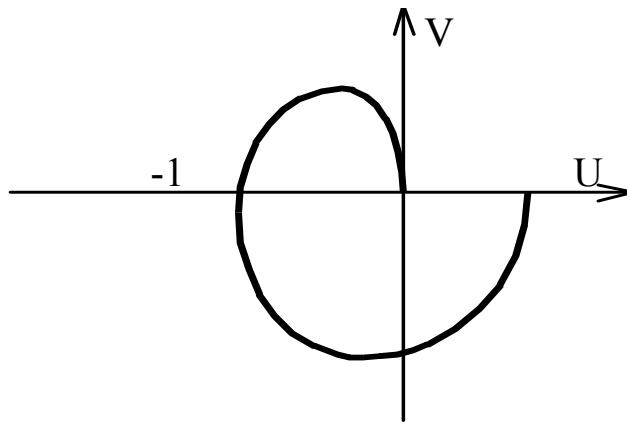


Рис. 3.9

На этом основано понятие о запасе устойчивости, характеризующее удаление характеристики от точки  $(-1,0)$ . Если замкнутая система находится на границе устойчивости, то в точке  $(-1,0)$ , модуль частотной характеристики равен единице, а фаза равна  $\pi$ . Поэтому запас устойчивости по амплитуде  $\Delta A$  характеризуется отличием модуля  $|W_p(p)|$  от единицы при  $\varphi = \pi$ , а запас устойчивости по фазе  $\Delta\varphi$  - отличием фазы  $\varphi$  от  $\pi$  при  $|W_p(j\omega)| = 1$  (рис. 3.8). Пользуясь этими пояснениями, можно исследовать запасы устойчивости системы.

#### 3.4. Особые точки и особые линии фазовых траекторий систем в пространстве состояний.

Фазовая траектория представляет собой годограф обобщенных координат системы в пространстве состояний (фазовом пространстве). Фазовые траектории свободного движения системы при различных начальных условиях образуют фазовый портрет системы, позволяющий дать качественную оценку динамических свойств системы, в том числе и ее устойчивости.

Для наглядной геометрической интерпретации фазовых траекторий ограничимся системами второго порядка.

Пусть имеется система, описывается дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{(c_m I - M_c)}{J}; \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{(U - IR - c_e \omega)}{L}; \\ U &= k_p x; x = g - k_{oc} \omega. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Этому случаю соответствует структурная схема (рис 3.10)

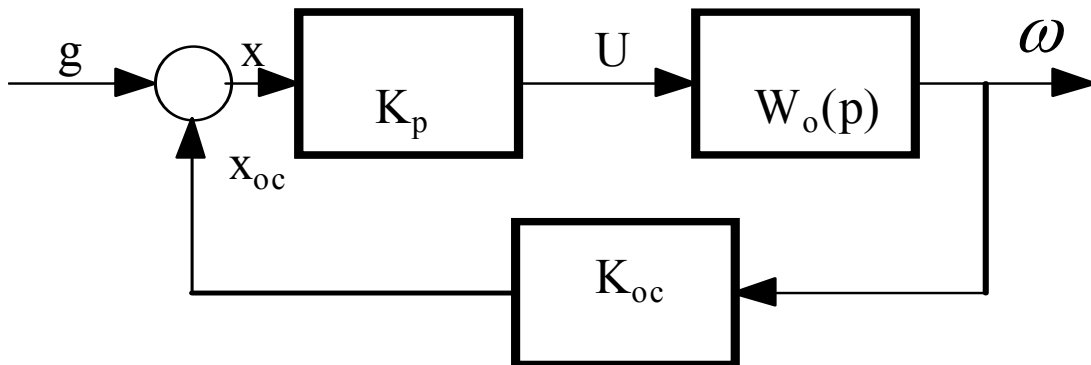


Рис 3.10.

Введем приращение координат и управляющей переменной:

$$\begin{aligned} I &= I_n - \Delta I; \\ \omega &= \omega_n - \omega; \\ g &= g_n - \Delta g. \end{aligned}$$

и подставим полученные значения в уравнение (3.26).

Обозначая,  $\Delta\omega = x_1, \Delta I = x_2; \Delta g = 0$  после очевидных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{12} x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2; \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$a_{12} = \frac{c_m}{J}; a_{21} = -\frac{c_e + k_p k_{oc}}{L}; a_{22} = -\frac{R}{L}.$$

Найдем корни  $Z_1$  и  $Z_2$  характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} 0 - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^2 - a_{22}\lambda - a_{12}a_{21} = 0.$$

Пусть  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , тогда введением новых переменных

$$\begin{aligned} x &= Ax_1 + Bx_2; \\ y &= Cx_1 + Dx_2, \end{aligned}$$

где  $A, B, C$  и  $D$  можно найти решая систему:

$$\begin{cases} (0 - \lambda_2)A + a_{21}B = 0; \\ a_{12}A + (a_{22} - \lambda_2)B = 0; \\ (0 - \lambda_1)C + a_{21}D = 0; \\ a_{12}C + (a_{22} - \lambda_1)D = 0. \end{cases}$$

Заменой переменных систему уравнений (3.27) можно привести к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 y}{\lambda_2 x}.$$

Решение, которого будет иметь вид:

$$y = C_0 |x|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (3.28)$$

Если  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ , то посредством замены

$$\begin{aligned} x &= a_{21}x_1 + \frac{a_{22}}{2}x_2; \\ y &= x_2. \end{aligned}$$

исходная система приводится к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + \lambda y}{\lambda x}. \quad (3.29)$$

Решение этого уравнения будет выглядеть:

$$y = \frac{1}{\lambda} x \ln x + C_0 x; \quad (3.30)$$

Особыми точками таких уравнений являются точки в которых производная неопределенна, т. е. имеет место деление ноль на ноль.

Рассмотрим несколько особых точек определяемых корнями характеристического уравнения.

1. Корни действительные и одного знака. Особая точка называется узлом. Все кривые в особой точке имеют общую касательную.

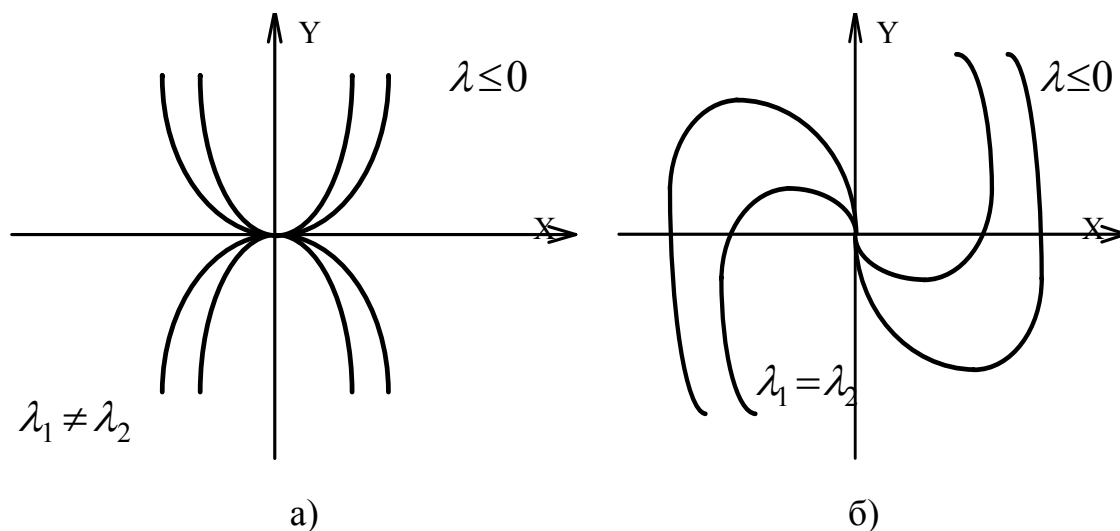


Рис 3.11.

Для устойчивой системы (корни отрицательные) особая точка является точкой устойчивого равновесия, и движение системы осуществляется в особую точку, т.е. в начало координат. Для неустойчивой системы особая точка является точкой неустойчивого равновесия, и движение системы происходит из особой точки.

2. Корни действительные и разных знаков. Особая точка называется седлом (рис.3.12). Система в этом случае неустойчива и не имеет точки устойчивого равновесия.

3. Корни комплексно-сопряженные. Особая точка называется фокусом (рис.3.13).

Имеет место случай аналогичный первому. Для устойчивой системы особая точка является точкой устойчивого равновесия и свободное движение системы заканчивается в этой точке. В случае неустойчивой системы (корни имеют положительную действительную часть) особая точка является точкой неустойчивого равновесия.

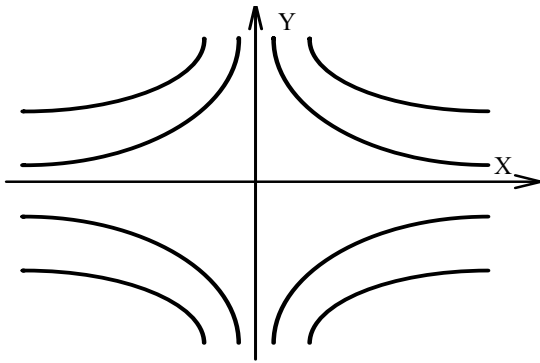


Рис. 3.12

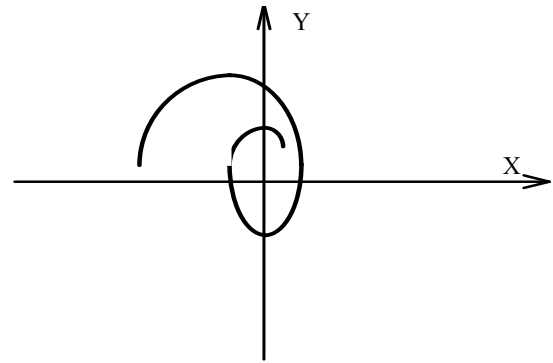


Рис. 3.13

4. Корни чисто мнимые. Особая точка называется центром.

Система в этом случае находится на колебательной границе устойчивости и совершает движение по замкнутому циклу, размер которого зависит от начальных возмущений (рис. 3.14).

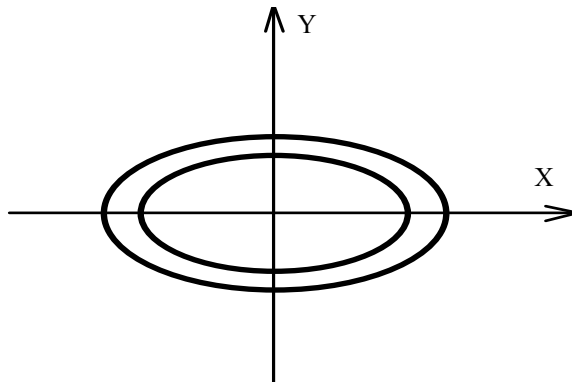


Рис. 3.14

В отличие от линейных нелинейные системы обладают большим разнообразием фазовых траекторий, характерной особенностью которых являются наличие особых линий соответствующих либо режиму автоколебаний, либо границе устойчивости, либо наличием зоны нечувствительности.

Для линейных систем понятие устойчивости " в малом " и " большом " совпадают.

Для нелинейных систем кроме абсолютно устойчивой и абсолютно не устойчивой возможны другие варианты:



1. Система неустойчива "в малом", но устойчива "в большом".
2. Система устойчива "в малом", но неустойчива "в большом".

Картина фазовых траекторий для первого случая показана на рис. 3.15. В начале координат в фазовые траектории имеют вид расходящихся спиралей, как в неустойчивой линейной системе, но далее все они расходятся не до бесконечности, а асимптотически приближаются к некоторому замкнутому контуру ограниченных размеров ABCD.

При больших возмущениях система оказывается устойчивой, так как внешние спирали стремятся к замкнутому контуру. Это замкнутая кривая ABCD называется устойчивым предельным циклом. Устойчивый предельный цикл соответствует автоколебательному режиму нелинейной системы.

Второму случаю соответствует фазовые траектории рис 3.16.

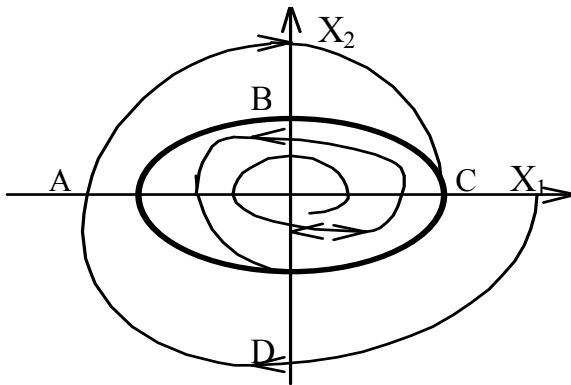


Рис. 3.15

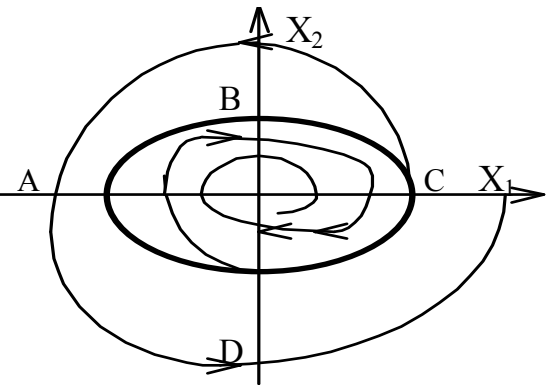


Рис. 3.16

Граница возмущений, до которой система устойчива, называется неустойчивым предельным циклом.

Возможен еще более сложный случай устойчивости, когда внутренний неустойчивый предельный цикл охватывается устойчивым внешним предельным циклом.

Для сложных систем число устойчивых и неустойчивых предельных циклов может быть весьма большим.

Если линеаризованная "в малом" система имеет чисто мнимые корни, то при больших возмущениях, за счет нелинейностей, может возникнуть устойчивый или неустойчивый предельный цикл рис. 3.17.

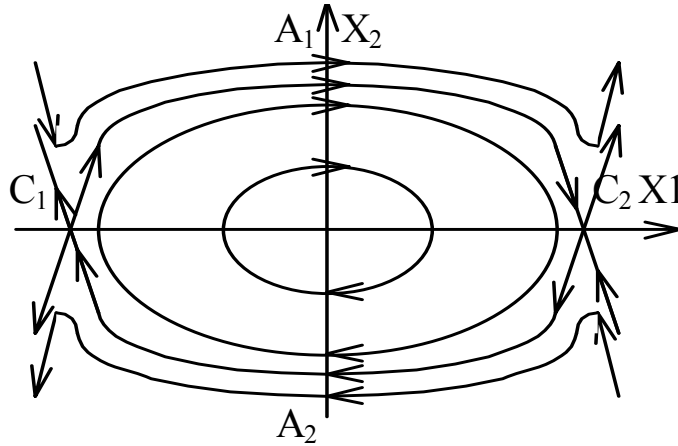


Рис. 3.17

Линии  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $C_2$ ,  $A_2$ , называются сепаратриссами. Возможны и более сложные особые линии.

Если область притяжения к предельному устойчивому циклу бесконечна, то система называется устойчивой в целом.

### 3.5 Понятие абсолютной устойчивости.

#### Прямой метод Ляпунова.

Для определения абсолютной устойчивости линейных систем Ляпуновым был разработан специальный метод называемый в настоящее время прямым (вторым) методом Ляпунова. Основопологающим понятием этого метода является понятие о знакоопределенной (положительно определенной, отрицательно определенной) и знакопостоянной (знакоположительной, знакоотрицательной) функциях.

Функция  $V(\mathbf{x})$  в пространстве состояний  $G$  размерности  $n$  называется знакоопределенной, если она во всех точках этого пространства сохраняет один и тот же знак и нигде не обращается в нуль, кроме начала координат.

$V(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in G$  – положительно определенная функция;

$V(\mathbf{x}) < 0, \mathbf{x} \in G$  – отрицательно определенная функция;

$V(\mathbf{x}) = 0$ .

Функция  $V(\mathbf{x})$  называется знакопостоянной, если она сохраняет один и тот же знак во всей области пространства состояний и может обращаться в нуль не только в начале координат.

$V(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in G$  – знакоположительная функция;

$V(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in G$  – знакоотрицательная функция;

$V(\mathbf{x}) = 0$ .

Примером таких функций могут являться:

Функция  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  - положительно определенная.

Функция  $V(\mathbf{x}) = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$  - отрицательно определенная.

Функция  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$  - знакоположительная при  $n=3$ , т.е.  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ .

Функция  $V(\mathbf{x}) = -(x_1^2 + x_2^2)$  - знакоотрицательная при  $n=3$ .

Пусть система описывается дифференциальными уравнениями вида.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t). \quad (3.31)$$

Тогда каждое решение  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{(1)}(t)$  при помощи замены  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{(1)}(t)$  можно преобразовать решение  $\mathbf{z}(t) \equiv 0$  новой системы

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = f(\mathbf{z} + \mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{u}, t) - f(\mathbf{x}_{(1)}, \mathbf{u}, t) = F(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t). \quad (3.32)$$

При этом  $F(0, \mathbf{u}, t) = 0$  для всех  $t \geq 0$ .

Функция  $V(\mathbf{z}, t) \equiv V(z_1, z_2, \dots, z_n, t)$  называется функцией Ляпунова для системы (3.30), если:

1.  $V(\mathbf{z}, t)$  непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности  $G$  точки  $\mathbf{z} = 0$  в пространстве состояний  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  при всех  $t \geq 0$ .

2.  $V(0, t) = 0$  при всех  $t \geq 0$ .

3.  $V(\mathbf{z}, t) \geq W(\mathbf{z})$  для всех точек  $\mathbf{z}$ , принадлежащих  $G$ , и при всех  $t \geq 0$ , где функция  $W(\mathbf{z})$  такова, что  $W(\mathbf{z}) > 0$  для всех  $\mathbf{z} \neq 0$  и  $W(0) = 0$ .

$$4. \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial z_k} F_k \leq 0 \text{ для всех } \mathbf{z} \in G \text{ и } t \geq 0.$$

При таком определении функции Ляпунова теорема об устойчивости формулируется следующим образом.

Решению  $\mathbf{z}(t) \equiv 0$  устойчиво в смысле Ляпунова в том и только в том случае, если существует соответствующая функция Ляпунова (теорема Ляпунова об устойчивости).

Решение асимптотически устойчиво в окрестности  $G$ , если существует функция Ляпунова  $V(\mathbf{z}, t)$ , удовлетворяющая в  $G$  строгому неравенству  $\frac{dV}{dt} < 0$  для всех  $\mathbf{z} \neq 0$  (теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости).

Продemonстрируем справедливость этой теоремы на примере системы третьего порядка.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3); \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3); \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Возьмем знакоопределённую положительную функцию Ляпунова в виде:

$$V(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2,$$

$a, b, c$  - произвольные положительные числа

Очевидно, что поверхности равного уровня для функции Ляпунова  $V(\mathbf{x}) = C$  будут представлять собой эллипсоиды в пространстве состояний. Возьмем производную от функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt} = W(\mathbf{x}) = 2ax_1f_1 + 2bx_2f_2 + 2cx_3f_3.$$

Если производная будет знакоопределённой и отрицательной  $W(\mathbf{x}) < 0$  во всех точках исследуемого пространства, кроме начала координат, то при любых начальных отклонениях обобщенных координат, изображающая точка, в следствии, отрицательности производной от функции Ляпунова, будет двигаться в сторону уменьшения этой функции, т.е. будет пересекать эллипсоиды извне вовнутрь. Следовательно с течением времени изображающая точка  $A$  достигнет начала координат (рис. 3.18).

Если производная будет не знакоопределенной, а знакопостоянной, то в этом случае изображающая точка  $A$  касается поверхностей равного уровня и может застрять на этой поверхности образуя предельный устойчивый цикл.

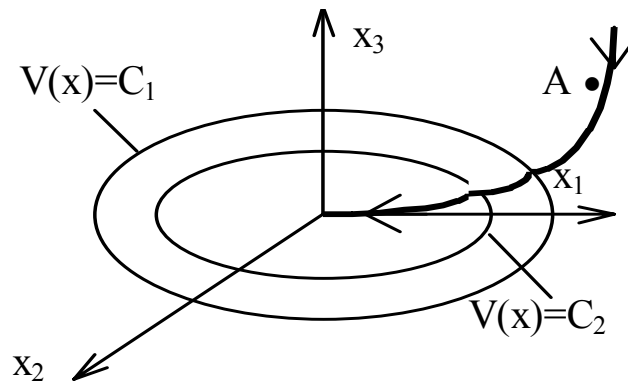


Рис. 3.18

По аналогии формулируем теорему Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем.

Решение  $\mathbf{z}(t) \equiv 0$  уравнения (3.30) неустойчиво, если существует область  $G_1$ , содержащаяся в некоторой окрестности  $G$  точки  $\mathbf{z} = 0$ , и действительная функция  $W(\mathbf{z})$  такая что

1. Функция  $W(\mathbf{z})$  непрерывно дифференцируема в  $G_1$  и

$$W(\mathbf{z}) > 0, \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial W}{\partial z_k} F_k > 0,$$

для всех  $\mathbf{z} \neq 0$  в  $G_1$ .

2.  $W(0) = 0$  во всех граничных точках области  $G_1$ , лежащих внутри  $G$ .

Отметим особенности применения теоремы Ляпунова.

1. Теорема Ляпунова не позволяет определить функцию Ляпунова, т.е. чтобы этой теоремой воспользоваться, нужно сначала каким-либо образом задать функцию  $V(\mathbf{z}, t)$ .

2. Теорема Ляпунова дает достаточные, но не необходимые условия устойчивости, т.е. выполнение условий теоремы гарантирует устойчивость, но нет гарантии, что выбор другого вида функции Ляпунова не изменяет область устойчивости в пространстве состояний.

Рассмотрим применение второй теоремы Ляпунова для системы (3.26). После введения новой переменной в соответствии с (3.27) получим (3.7). Введем функцию Ляпунова равную энергетическому потенциалу системы.

$$V(\bar{x}) = \frac{Jx_1^2}{2} + \frac{Lx_2^2}{2}.$$

Первое слагаемое пропорционально приращению кинетической энергии системы, второе - энергии магнитного поля двигателя.

Очевидно, что эта функция знакоопределенная, а точнее положительно определенная. Найдем производную по времени от функции Ляпунова  $V$ .

$$W(\mathbf{x}) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt}.$$

Подставим сюда производные от  $x_1, x_2$  из (3.27). После преобразований найдем  $W(\mathbf{x})$  и потребуем, чтобы она была знакоотрицательной:

$$W(\mathbf{x}) = (c_m - c_e)x_1x_2 - R_\alpha x_2^2 < 0,$$

так как  $c_m = c_e$ , то система будет устойчивой при  $R_\alpha > 0$ .

## 4. КАЧЕСТВО СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.

### 4.1. Критерии качества.

Для сравнительного анализа различных систем управления необходимо иметь некоторые числовые характеристики этих систем позволяющие оценивать какая из них будет более эффективной. Эти числовые характеристики и называются критериями качества.

Критерии качества позволяют дать количественную оценку различным системам управления и тем самым обоснованно подойти к выбору системы и ее закона управления, удовлетворяющему выбранному критерию качества.

Система управления характеризуется различными показателями, к которым в первую очередь можно отнести: точность, устойчивость, быстродействие надежность, стоимость, оптимальность и др. Учитывая большое разнообразие систем и объектов управления, в настоящее время разработано большое число различных критериев так или иначе включающих в себя вышеприведенные показатели. Между этими показателями (критериями качества) существует тесная взаимосвязь, поэтому стремление улучшить какой-либо показатель системы управления приводит к ухудшению другого. Так, например, стремление уменьшить ошибку регулирования приводит к уменьшению запаса устойчивости и быстродействия и наоборот, или повышение надежности системы неизбежно приводит к увеличению ее стоимости.

Использование того или иного показателя системы или их комбинации в виде критериев качества определяется удобством его применения в системах управления, а также, в известной мере, сложившимися традициями.

В линейных системах наиболее широко используются критерии качества переходных процессов, которые подразделяются на прямые, косвенные и инте-

гральные. Кроме этого на основе этих критериев могут быть вычислены еще ряд дополнительных критериев, к которым относятся:

1. Критерии точности, использующие для оценки качества величину ошибки управления и регулирования в некоторых типовых режимах.
2. Критерии запаса устойчивости, устанавливающие, насколько далеко от границы устойчивости находится система управления.
3. Критерии быстродействия, позволяющие оценить время переходных процессов в системе.

Вычисление всех этих критериев основывается на использовании математического аппарата теории управления, причем наиболее часто при вычислении критериев качества используются временные и частотные характеристики систем. По временным характеристикам определяют прямые показатели качества, по частотным характеристикам - косвенные. К косвенным показателям качества относятся также и корневые критерии, позволяющие по корням характеристического уравнения замкнутой системы оценить ее свойства.

Понятие критериев качества тесно связано с понятием критериев оптимальности, а в ряде случаев эти понятия совпадают.

Учитывая взаимосвязь между различными показателями систем управления задачу выбора или проектирования оптимальной системы можно рассматривать как задачу на условный экстремум. Найти экстремум (минимум и максимум) какого-либо показателя, например стоимости, при условии, что остальные показатели превышают заранее заданной величины.

Такой постановке отвечают интегральные критерии качества, представляющие собой определенные интегралы от некоторых функций переменных системы. Наиболее часто в качестве подынтегральной функции используются квадратичные формы от обобщенных координат  $x$  и управлений  $u$  системы.

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{U}) dt, \quad (4.1)$$



где  $Q$  - заданная положительно-определенная матрица весовых коэффициентов размера  $n \times n$ ,  $n$  - порядок системы.

Дополнительными условиями в том случае являются уравнения системы и ограничения на изменение обобщенных координат и управлений.

Рассмотрим основные наиболее употребительных критериев качества.

#### 4.2. Временные показатели качества.

Временные показатели качества системы регулирования (рис. 4.1), определяются по переходной характеристике замкнутой системы (рис. 4.2).

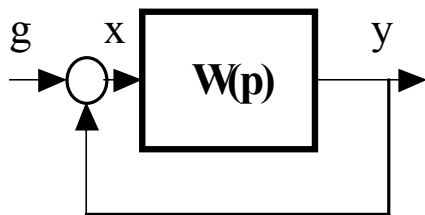


Рис.4.1

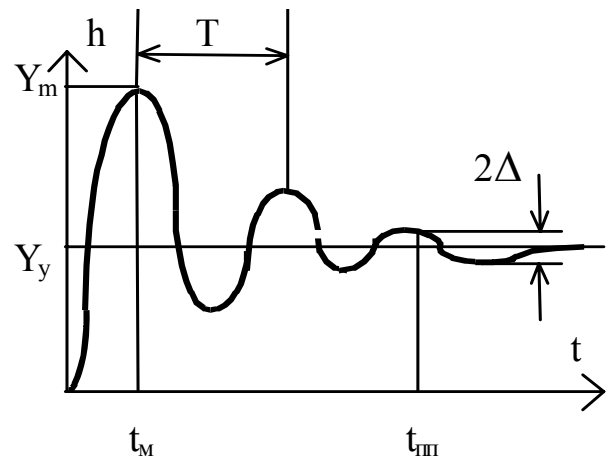


Рис. 4.2

Критерии точности системы, к которым относятся статическая и динамическая ошибки системы могут быть определены из очевидных соотношений:

$$X_{ст} = g - Y_y; X_m = g - Y_m .$$

Статическую ошибку системы можно вычислить используя выражение передаточной функции системы по управляющему или возмущающему воздействиям. Так для замкнутой системы, структурная схема которой показана на рис. 4.2, ошибка системы будет равна:

$$\begin{aligned}
 x(p) &= g(p) - y(p); \\
 y(p) &= x(p)W(p); \\
 W(p) &= \frac{k(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m)}{p^s (p^{n-s} + a_1 p^{n-s-1} + \dots + a_{n-s-1} p + a_{n-s})}.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Подставляя второе уравнения в первое, найдем:

$$x(p) = \frac{g(p)}{1 + W(p)}. \tag{4.3}$$

Используя теорему о предельном значении изображения найдем  $X_c$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} X_c(p). \tag{4.4}$$

Подставляя сюда выражение для  $X_c$  получим:

$$X_c = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g(p)}{1 + W(p)}. \tag{4.5}$$

Если система не содержит в своем составе интегрирующих звеньев в выражении передаточной функции (4.2)  $s = 0$ , что соответствует отсутствию в знаменателе передаточной функции сомножителей  $p$ , то такая система называется статической и ее статическая ошибка при  $g(t) = 1(t)$  и будет равна конечной величине получаемой после подстановки в (4.5) выражения (4.2)

$$X_{cm} = \frac{1}{1 + k},$$

где  $k$  - коэффициент усиления разомкнутой системы.

В том случае если в составе системы имеются интегрирующие звенья  $s \neq 0$ , то система называется астатической. Статическая ошибка системы будет равна нулю т.к.  $\lim_{p \rightarrow 0} W(p) \rightarrow \infty$ , а выражение (4.5) для статической ошибки будет

стремиться к нулю.

Запас устойчивости системы оценивается по перерегулированию :

$$\sigma = \frac{y_m - y_y}{y_y} \cdot 100\% \tag{4.6}$$

В большинстве случаев считается, что запас устойчивости является достаточным, если величина  $\sigma$  не превышает 10 - 30 процентов.

Быстродействие системы определяется по длительности переходного процесса. Так как в линейных системах время переходного процесса бесконечно длительно, длительность переходного процесса оценивается как время, протекающее от момента приложения на вход единичного скачка до момента, когда имеет место неравенство:

$$|y(t) - y(\infty)| < \Delta, \quad y(\infty) = y_y, \quad (4.7)$$

где  $\Delta$  малая постоянная величина равная 1-5% от  $y_y$ . Если система астатическая  $y_y = 0$ , то в качестве  $\Delta$  принимают допустимую ошибку регулирования. Оценка качества управления по временным (переходным) характеристикам системы весьма наглядна и может быть экспериментально проведена на действующих АСР, что является несомненным достоинством временных показателей качества. Для вновь проектируемых САР временные показатели качества менее удобны, так как требуют вычисления переходных характеристик, что для систем высокого порядка является достаточно сложной вычислительной задачей. Более простым в вычислительном отношении является определение корней характеристического уравнения замкнутой системы и частотных характеристик, поэтому наряду с временными критериями качества широко используются и косвенные критерии качества основанные на вычислении корней характеристического уравнения замкнутой системы и частотных характеристик.

### 4.3. Корневые критерии качества

Известно, что вид корней характеристического уравнения линейной системы определяет характер переходных процессов в ней происходящих. Поэтому расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоско-

сти может служить оценкой характера переходных процессов в системе. Чем ближе корни характеристического уравнения располагаются к мнимой оси, тем медленнее будут затухать переходные процессы.

Абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня называется степенью устойчивости:

$$h = \min_j \left| \operatorname{Re}(P_j) \right|. \quad (4.8)$$

Если ближайшим к мнимой оси будет вещественный корень, то составляющая переходного процесса, определяемая этим корнем, будет иметь вид:

$$X_h(t) = C_h \cdot e^{-ht}.$$

Причем все остальные составляющие переходного процесса будут затухать быстрее, так как показатель степени будет больше.

Если считать, что переходный процесс заканчивается при  $h t_n \approx 3$ , то можно определить время переходного процесса из соотношения:

$$t_n \approx \frac{3}{h}. \quad (4.9)$$

Если ближайшей к мнимой оси является пара комплексно-сопряженных корней  $-\eta \pm j\beta$ , то составляющая переходного процесса, определяемая этими корнями примет вид  $X_\eta(t) = C_\eta e^{-\eta t} \cdot \sin \beta t$ , что при  $\sin \beta t = 1$  дает (4.9).

Если в системе имеют место два колебательных процесса с одинаковой степенью устойчивости  $\eta$ , но различной частотой  $\beta$ , как показано на рис. 4.3 можно утверждать, что хотя время затухания этих процессов будет одинаково, однако эти процессы будут существенно отличаться друг от друга. Для сравнения колебательных процессов, поэтому вводят дополнительный показатель качества называемый степенью колебательности.

Степень колебательности равна отношению мнимой части корня к вещественной:

$$\mu = \frac{\beta}{\eta}. \quad (4.10).$$

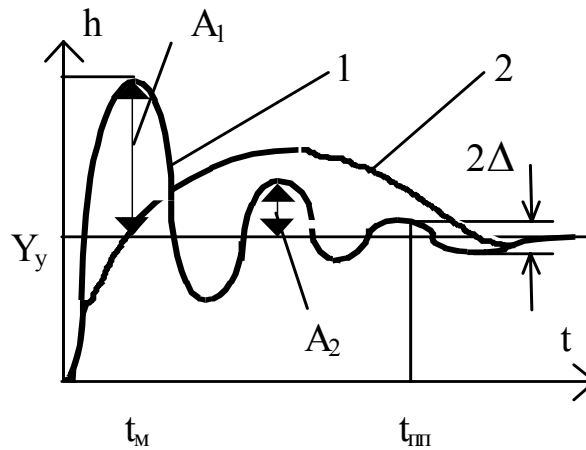


Рис. 4.3.

Задание определенной величины колебательности ограничивает область расположения корней характеристического уравнения двумя лучами, составляющими с вещественной осью угол

$$\varphi = \pm \arctg \frac{\beta}{\eta} = \pm \arctg \mu. \quad (4.11)$$

Таким образом, если в системе заданы степень устойчивости и колебательности все корни характеристического уравнения системы должны располагаться внутри не заштрихованной области комплексной плоскости, определяемой выражениями (4.1) и (4.2) рис. 4.4.

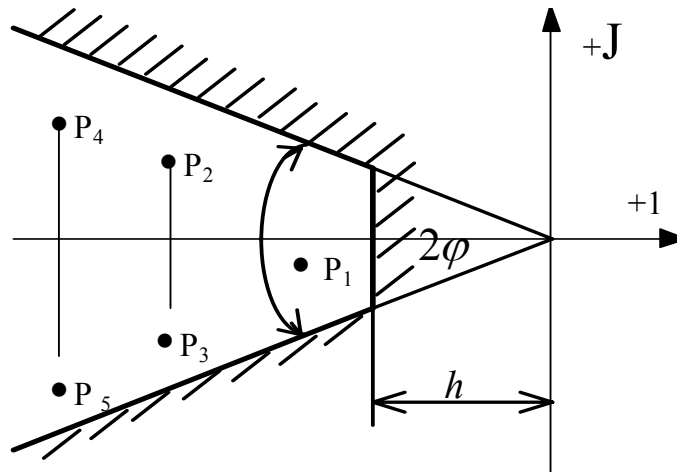


Рис. 4.4

Степень колебательности связана с еще одним корневым показателем качества - степенью затухания.

Затухание показывает на сколько уменьшается относительная амплитуда колебаний за один период:

$$\xi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{Y(t+T)}{Y(t)},$$

где

$$Y(t) = C \cdot e^{-\eta t} \cdot \sin(\beta t + \psi);$$

$$Y(t+T) = C \cdot e^{-\eta(t+T)} \cdot \sin(\beta t + \psi).$$

Откуда

$$\xi = 1 - e^{-\eta T}.$$

Принимая во внимание, что  $T = \frac{2\pi}{\beta}$ , а  $\frac{\beta}{\eta} = \mu$  окончательно получим:

$$\xi = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\mu}}. \quad (4.12)$$

Кроме затухания, иногда приводится логарифмический декремент затухания равный показателю степени в выражении (4.12):

$$\lambda = \frac{2\pi \eta}{\beta}.$$

Недостатком корневых критериев качества является необходимость вычисления корней характеристического уравнения и невозможность или сложность их экспериментального определения. Поэтому большее распространение получили частотные показатели качества.

#### 4.4. Частотные показатели качества.

Частотные показатели качества определяются по частотным характеристикам системы и в частности по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы и амплитудно-фазо-частотной характеристике разомкнутой системы. Нормированная амплитудно-частотная характеристика замкнутой системы рис. 4.5 дает следующие показатели качества:

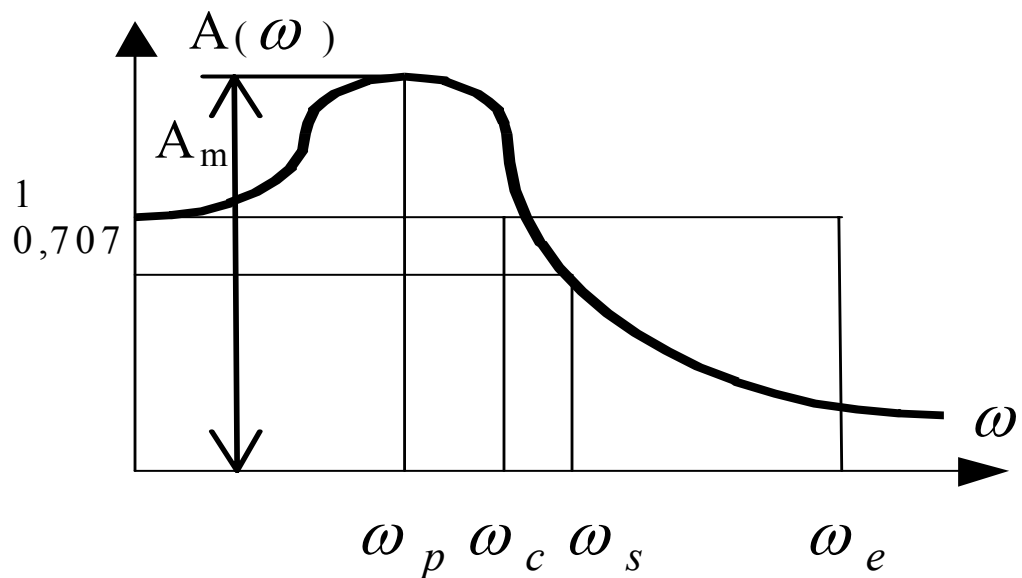


Рис. 4.5

1. Показатель колебательности  $M = A_M$  ;
2. Резонансная частота системы  $\omega_P$  ;
3. Частота среза, при которой  $A(\omega_C) = 1$  ;

4. Частота пропускания  $A(\omega_{\Pi}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ;

5. Эквивалентная частота пропускания  $\omega_{\Sigma}$

$$\omega_{\Sigma} = \int_0^{\infty} A^2(\omega) \cdot d\omega$$

Показатель колебательности  $M$  характеризует запас устойчивости системы, чем выше показатель колебательности, тем меньше запас устойчивости.

Допустимое значение  $M$  выбирается из условия  $M < 1,1-1,5$ .

Быстродействие системы оценивается по частоте пропускания, чем выше частота пропускания, тем больше быстродействие системы.

Использование АФЧХ разомкнутой системы позволяет оценить запас устойчивости системы на основании запаса устойчивости по амплитуде (модулю)  $A$  и фазе  $\varphi$ . Эти показатели связаны с критерием устойчивости Найквиста.

Рассмотрим АФЧХ устойчивой системы в окрестностях точки  $(-1, 0)$  рис .4.6

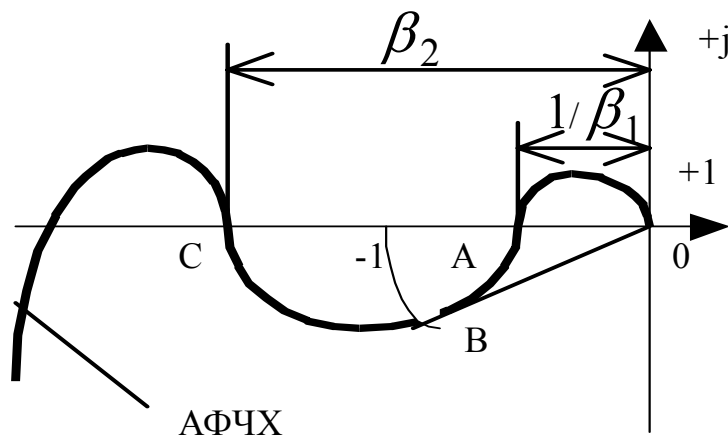


Рис 4.6.

Для общего случая условной устойчивости (рис. 4.6) запас устойчивости определяется двумя точками  $a$  и  $c$  по выражениям

$$L_1 = 20 \lg \beta_1;$$

$$L_2 = 20 \lg \beta_2.$$



В хорошо демпфированных системах эти величины составляют примерно 6-20 дБ, что соответствует 2-10 кратному уменьшению коэффициента усиления системы.

Для абсолютно устойчивых систем  $L_2 \rightarrow \infty$  и оценку запаса по модулю производят по  $L_1$

Запасом устойчивости по фазе  $\varphi$  называется выражение

$$\varphi = 180 + \psi(\omega_c),$$

где  $\psi$  - аргумент АФЧХ, соответствующий модулю АФЧХ равному 1 (точка в на рис. 4.6). В хорошо демпфированных системах запас по фазе составляет 30 - 60°.

Зная частотные характеристики системы можно вычислить их временные характеристики, используя преобразование Фурье.

Можно записать

$$h(t) = L^{-1} \left[ \frac{W(p)}{p} \right] = \Phi^{-1} \left[ \frac{W(j\omega)}{j\omega} \right],$$

где  $L^{-1}, \Phi^{-1}$  - обратные преобразования Лапласа и Фурье.

Переходя к вещественной форме интеграла Фурье, получим

$$h(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \left[ \frac{W(j\omega)}{j\omega} \right] \sin \omega t d\omega.$$

Подставляя сюда  $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ , и выделяя мнимую часть, найдем

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U(\omega) \frac{\sin(\omega t)}{\omega} dt. \quad (4.13)$$

Для систем невысокого порядка все критерии и показатели качества связаны между собой. Рассмотрим это утверждение на примере колебательного звена с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Корни характеристического уравнения найдем из условия

$$T^2 p^2 + 2\xi T p + 1 = 0.$$

Откуда

$$p_{1,2} = -\frac{\xi}{T} \pm \frac{j\sqrt{1-\xi^2}}{T} = -\eta \pm j\beta.$$

Следовательно, степень устойчивости и степень колебательности для такого звена будут равны

$$\eta = \frac{\xi}{T} \quad ; \quad \mu = \frac{\beta}{\eta} = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.$$

Переходную характеристику звена найдем путем обратного преобразования Лапласа-Карсона от передаточной функции

$$h(t) = K \left[ 1 - e^{-\eta t} \cdot \left( \cos \beta t + \frac{\eta}{\beta} \sin \beta t \right) \right].$$

Максимальные значения вычисляются по следующей формуле:

$$h_M = \frac{K \cdot e^{-\frac{\eta \pi}{2\beta}}}{T \cdot \sqrt{1-\xi^2}}.$$

Перерегулирование будет равно:

$$\sigma = \left( \frac{e^{-\frac{\eta \pi}{2\beta}}}{T \cdot \sqrt{1-\xi^2}} - 1 \right) \cdot 100\%.$$

Время переходного процесса  $t_{\Pi}$  найдем из условия, при котором

$$h(t_{\Pi}) = 0,95h_{уст} \quad ; \quad t_{\Pi} = -\frac{\ln 0,05}{\eta}.$$

Амплитудно-частотная характеристика звена будет равна модулю частотной передаточной функции

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + 4\xi^2 \omega^2 T^2}}.$$

Максимальное значение  $A_M$  найдем из уравнения  $\frac{dA}{d\omega} = 0$

$$\omega_P = \frac{\sqrt{1 - 2\xi^2}}{T}.$$

Откуда показатель колебательности  $M$  найдем из отношения:

$$\frac{A_M}{A(0)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\xi\sqrt{1 - \xi^2}}.$$

#### 4.5. Интегральные критерии.

Интегральные оценки дают общую оценку качества переходных процессов. Наряду с обобщенным интегральным критерием (4.1) используются более простые критерии или функционалы.

Простейшей интегральной оценкой для одномерных систем может служить величина

$$J_0 = \int_0^{\infty} X(t) dt. \quad (4.14)$$

где  $X$ - ошибка системы.

Очевидно, что  $J_0$  будет тем меньше, чем быстрее затухает переходный процесс и чем меньше величина ошибки.

Для вычисления интеграла (4.14) достаточно знать изображение  $X(p)$ , а затем воспользоваться теоремой о предельном значении изображения

$$\int_0^{\infty} X(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} X(P). \quad (4.15)$$

Для типового входного сигнала типа  $\delta$  - функции

$$\int_0^{\infty} X(t) dt = \int_0^{\infty} \omega(t) dt = \lim_{p \rightarrow 0} W(P). \quad (4.16)$$

Неудобство интегральной оценки вида (4.14) является то, что она может использоваться только для апериодических процессов. Если имеем место колебательный процесс, то используются критерии.

$$J_1 = \int_0^{\infty} |X(t)| dt. \quad (4.17)$$

$$J_2 = \int_0^{\infty} X^2(t) dt. \quad (4.18)$$

Более широко используются последний критерий (4.18), называемый квадратичной интегральной оценкой. Это обусловлено возможностью вычисления этого критерия без непосредственного определения  $X(t)$ .

Для обоснования этого утверждения запишем интеграл (4.18) в виде.

$$\int_0^{\infty} X(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(i\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \right] dt.$$

В выражение в квадратных скобках - обратное преобразование Фурье от  $X(t)$ . В последней формуле изменим порядок интегрирования

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} X(i\omega) \left[ \int_0^{\infty} X(t) \cdot e^{i\omega t} dt \right] d\omega.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках есть прямое преобразование Фурье от  $X(t)$  при замене  $\omega$  на  $-\omega$ , с учетом этого получается формула Рэлея.

$$\int_0^{\infty} X^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |X(i\omega)|^2 d\omega, \quad (4.19)$$

где  $X(i\omega)$  - преобразование Фурье от  $X(t)$ .

Если использовать выражение для передаточной функции по ошибке  $W_X(p)$  от задающего сигнала, то выражение (4.19) можно записать в виде:

$$\int_0^{\infty} X^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |W_X(i\omega) q(i\omega)|^2 d\omega. \quad (4.20)$$

Если  $q(t) = \delta(t)$ , то  $q(i\omega) = 1$  и интегральный квадратный критерий примет вид:

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |W_X(i\omega)|^2 d\omega. \quad (4.21)$$

Оценка качества системы по интегральной квадратичной оценке не учитывает колебательность переходного процесса. Оказывается, что переходные процессы с разными показателями колебательности и различной длительностью переходных процессов могут дать равные значения критерия (4.18). Если выбирать параметры системы по минимуму этой оценки, то переходные процессы в такой системе имеют высокий показатель колебательности.

Поэтому применяется еще один вид интегральной оценки.

$$I_4 = \int_0^{\infty} [X^2(t) + aX^2(t)] dt, \quad a > 0, \quad (4.22)$$

или

$$I_5 = \int_0^{\infty} [qX^2(t) + u^2(t)] dt, \quad q > 0. \quad (4.23)$$

Можно показать, что эти критерии эквивалентные друг другу, для этого достаточно в место  $X(t)$  подставить его выражение из уравнения динамики системы.

Последний критерий является частным случаем обобщенного критерия (4.1) для одномерной системы.

Необходимо отметить, что невозможно одновременно обеспечить наилучшие показатели качества по всем интегральным критериям. Например увеличе-

ние запаса устойчивости системы, приводит к увеличению динамической ошибки и наоборот, или стремление уменьшения показателя колебательности может привести к увеличению времени переходного процесса.

Поэтому при синтезе систем регулирования используют несколько показателей качества. Для одного из них, называемого критерием оптимальности, добиваются экстремального (минимального или максимального значения), а для других вводят ограничения в виде неравенств.

## 5. СИНТЕЗ АВТОМАТИЧЕСКИХ РЕГУЛЯТОРОВ

### 5.1. Понятия закона регулирования и управления

Рассмотрим обобщенную структуру системы управления (рис. 5.1.)

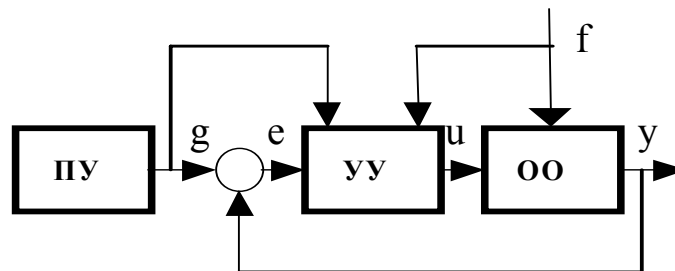


Рис. 5.1.

На структурной схеме приняты следующие обозначения. ПУ - Программное (задающее устройство), УУ - устройство управления (регулятор), ОО - обобщенный объект.

Для такой обобщенной структуры задачу управления можно сформулировать следующим образом. Для заданной математической модели объекта найти закон управления, удовлетворяющий заранее заданным критериям (показателям) качества, для всех  $x \in X$  и  $u \in U$ .

Под законом управления понимается функциональная взаимосвязь между обобщенными координатами системы  $x$  и управляющим воздействием  $u$ .

$$u = F(x, a), \quad (5.1)$$

где  $F$ , в общем случае, некоторая нелинейная функция,  $a$  - постоянные параметры закона управления.

Предполагается, что объект управления полностью управляем и наблюдаем, что позволяет достичь за конечное время любого  $x \in X$ , используя для управления  $u \in U$ , а также восстановить вектор обобщенных координат  $x$  по измеренным значениям вектора регулируемых величин  $y$ .

Задача синтеза системы управления включает в себя два этапа. На первом этапе решается задача оптимального синтеза в результате которой определяется функция  $F$ , удовлетворяющая заданным критериям оптимальности для всех  $x \in X$  и  $u \in U$ . Как правило, в качестве таких критериев используются интегральные критерии. На втором этапе решается задача параметрического синтеза, заключающаяся в определении параметра  $a$ , при заданной  $F$ , обеспечивающая системе показатели качества не хуже заданных. Чаще при решении этой задачи используют частотные, временные или корневые показатели качества.

Синтез автоматических регуляторов является частным случаем решения задачи управления и заключается в решении задачи параметрического синтеза. В результате решения этой задачи определяются закон регулирования и настройки регуляторов. В результате синтеза создаются системы автоматического регулирования, обеспечивающие движение объекта с заданной точностью по заранее заданной траектории, которая может быть и не оптимальной.

Для систем задаваемых структурой рис. 5.1 выражение (5.1.) может быть представлено в линейной форме:

$$u = F_1(e) + F_2(q) + F_3(f). \quad (5.2)$$

Первое слагаемое соответствует регулированию по отклонению. Второе и третье - регулированию по внешним воздействиям (по возмущению).

Ограничимся синтезом регуляторов реализующих линейные законы регулирования по обобщенным координатам или отклонению. В этом случае выражение для законов регулирования запишется в виде:

$$\begin{aligned} u &= L(x); \\ u &= \psi\left(e, \frac{de}{dt}, \int e dt\right). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Первое уравнение соответствует регулированию по обобщенным координатам, второе регулированию по отклонению. Для полностью наблюдаемых систем всегда можно перейти в (5.3) от обобщенных координат к ошибке системы и наоборот.



## 5.2. Основные законы регулирования.

Для одномерных систем используются пять законов регулирования:

1. Пропорциональный; 2. Интегральный; 3. Пропорционально-интегральный; 4. Пропорционально-дифференциальный; 5. Пропорционально-интегрально-дифференциальный.

Рассмотрим особенности динамики систем с этими законами для объекта второго порядка

$$W_0(p) = \frac{K_0}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}. \quad (5.4)$$

### Пропорциональный закон регулирования

Пропорциональный закон регулирования в соответствии с (5.2) задается выражением:

$$u = K_{\Pi} e. \quad (5.5)$$

Реализация такого закона осуществляется пропорциональным регулятором (П-регулятором) с передаточной функцией

$$W_P(p) = K_{\Pi}. \quad (5.6)$$

Оценим, каким образом влияет введение пропорционального регулятора на качество регулирования. Воспользуемся для этого корневыми критериями качества и статической ошибкой системы.

Для нахождения статической ошибки по регулируемому воздействию найдем выражения для передаточной функции по ошибке:

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + W(p)}, \quad (5.7)$$

где  $W(p)$  - передаточная функция разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{K_{\Pi} K_{\text{O}}}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}. \quad (5.8)$$

Выражение для статической ошибки найдем, используя теорему о предельном значении от изображения ошибки по Лапласу:

$$X_{cm} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g(p)}{1 + W(p)} = \frac{g(0)}{1 + K_{\Pi} K_{\text{O}}}. \quad (5.9)$$

Статическая ошибка системы с П-регулятором отлична от 0 и уменьшается с ростом  $K_{\Pi}$ , т.е. система с П-регулятором статическая.

Для оценки качества регулирования по корневым критериям найдем передаточную функцию замкнутой системы, используя рис. 5.1 и правило преобразования структурных схем.

$$W_3(p) = \frac{K_{\Pi} K_{\text{O}}}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) + K_{\Pi} K_{\text{O}}}. \quad (5.10)$$

После очевидных преобразований можно записать:

$$W_3(P) = \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{1}{\frac{T_1 T_2}{1 + K} \cdot P^2 + \frac{T_1 + T_2}{1 + K} \cdot P + 1}, \quad (5.11)$$

где  $K = K_{\Pi} K_{\text{O}}$  - коэффициент усиления разомкнутой системы.

Корни характеристического уравнения будут равны:

$$P_{12} = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)^2 - \frac{4(1+K)}{T_1 T_2}} \right]. \quad (5.12)$$

Сравнивая полученное выражение с выражением для корней характеристического уравнения объекта регулирования

$$P_{012} = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)^2 - \frac{4}{T_1 T_2}} \right] \quad (5.13)$$

можно сделать вывод об увеличении запаса устойчивости. Это следует из меньшего значения подкоренного выражения в формуле (5.12) по сравнению с (5.13).

Более того, чрезмерное увеличение коэффициента усиления П-регулятора увеличивает степень колебательности.

Таким образом, введение пропорционального регулятора уменьшает статическую ошибку системы в  $\frac{1}{1+K}$  раз и уменьшает степень колебательности, а, следовательно, и запас устойчивости.

### Интегральный закон

Интегральный закон регулирования осуществляется введением в систему интегрального регулятора (И-регулятора).

Выражения для интегрального закона и передаточная функция И-регулятора будут выглядеть:

$$u = \frac{1}{T_u} \int_0^t e dt; \quad (5.14)$$

$$W_p(p) = \frac{1}{T_u p}.$$

По аналогии с П-регулятором найдем статическую ошибку системы

$$X_{cm} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{g(p)1}{1+W(p)} = 0; \quad (5.15)$$

$$W(p) = \frac{K_0}{T_u p (T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}.$$

Этот предел будет стремиться к нулю, т.е. интегральный регулятор устраняет статическую ошибку регулирования и делает систему астатической.

Анализируя выражение для передаточной функции системы

$$W_3(p) = \frac{K_0}{T_u p (T_1 p + 1) (T_2 p + 1) + K_0}, \quad (5.16)$$

можно сделать вывод, что порядок системы возрос на единицу по сравнению с порядком объекта и в системе уменьшился запас по фазе и амплитуде.

Для системы третьего порядка устойчивость будет обеспечена при выполнении соотношения, следующего из критерия устойчивости Гурвица:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

$$\text{где } a_0 = T_1 \cdot T_2; \quad a_1 = T_1 + T_2; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = \frac{K_0}{T_u}$$

Откуда получается условие устойчивости для системы с И-регулятором и объектом второго порядка.

$$\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} > \frac{K_0}{T_u}. \quad (5.17)$$

Чем не больше будет величина параметра  $T_u$  настройки интегрального регулятора, тем больше будет запас устойчивости. Однако, увеличение  $T_u$  приводит к снижению быстродействия системы.

### Пропорционально-интегральный закон регулирования

Увеличить быстродействие системы при нулевой статической ошибке позволяет пропорционально-интегральный регулятор (ПИ-регулятор), задаваемый следующими соотношениями:

$$u = K_{\Pi} e + \frac{1}{T_u} \int_0^t e dt;$$

$$W_P(p) = K_{\Pi} + \frac{1}{T_u p} = \frac{K_{\Pi} T_u p + 1}{T_u p}. \quad (5.18)$$

Введение ПИ-регулятора позволяет при правильной его настройке компенсировать самую большую постоянную объекта, например  $T_1$ , и тем самым

значительно увеличить быстродействие системы, а наличие интегральной составляющей в законе регулирования устраняет статическую ошибку.

Для получения условия компенсации постоянной времени объекта запишем выражение для передаточной функции разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{K_0(K_{\Pi}T_u p + 1)}{T_u p(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}. \quad (5.19)$$

Если подобрать параметры настройки регулятор  $K_{\Pi}$  и  $T_u$  таким образом, чтобы  $K_{\Pi}T_u = T_1$ , то порядок системы понизится и (5.19) преобразуется к виду:

$$W(p) = \frac{K_0}{T_u p(T_2 + 1)}. \quad (5.20)$$

Откуда передаточная функция замкнутой системы будет равна

$$W_3(p) = \frac{K_0}{T_u p(T_2 p + 1) + K_0}, \quad (5.21)$$

а корни характеристического уравнения могут быть найдены по формуле:

$$P_{12} = -\frac{1}{2T_2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{K_0 T_2}{T_u}} \right). \quad (5.22)$$

Сравнивая (5.12) с (5.22) можно заключить, что запас устойчивости в системе с ПИ- и П-регуляторами соизмеримы, следовательно соизмеримо и быстродействие систем. Однако, ПИ-регулятор устраняет статическую ошибку.

### Пропорционально-дифференциальный закон регулирования

Еще большее быстродействие системы обеспечивает пропорционально-дифференциальный закон, реализуемый ПД-регулятором

$$u = K_{\Pi} e + T_d \frac{de}{dt}; \quad (5.23)$$

$$W(p) = K_{\Pi} + T_d p.$$

При правильной настройке ПД-регулятор также компенсирует наибольшую постоянную времени объекта. Условие компенсации найдем из передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_0 K_{\Pi} \cdot \left( \frac{T_d}{K_{\Pi}} p + 1 \right)}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)}. \quad (5.24)$$

Если принять  $T_1 = \frac{T_d}{K_{\Pi}}$ , то передаточная функция значительно упростится.

$$W(p) = \frac{K_0 K_{\Pi}}{T_2 p + 1}. \quad (5.25)$$

ПД-регулятор обеспечивает высокое быстродействие системы и увеличение запаса устойчивости, как по амплитуде, так и по фазе, однако он не устраняет статической ошибки.

### Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон регулирования

Этот закон сочетает достоинства всех вышеперечисленных законов.

$$u = K_{\Pi} e + \frac{1}{T_u} \int_0^t e dt + T_d \frac{de}{dt};$$

$$W(p) = K_{\Pi} + \frac{1}{T_u p} + T_d p = \frac{T_u T_d p^2 + K_{\Pi} T_u p + 1}{T_u p}. \quad (5.26)$$

ПИД-регулятор позволяет скомпенсировать сразу две постоянные времени, что следует из передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{K_0 (T_u T_d p^2 + K_{\Pi} T_u p + 1)}{T_u p (T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1)} \quad (5.27)$$

Если выполнить соотношения:  $T_u T_d = T_1 T_2$ ;  $K_{\Pi} T_u = T_1 + T_2$ , то передаточная функция замкнутой системы примет вид:

$$W_3(p) = \frac{K_0}{T_u p + K_0} = \frac{1}{\frac{T_u}{K_0} p + 1}. \quad (5.28)$$

Эта передаточная функция соответствует аperiodическому звену первого порядка и обладает высокими показателями качества.

Компенсация большего количества постоянных времени требует введения в состав регулятора двукратно дифференцирующих звеньев, что практически не реализуемо.

Для подтверждения этих утверждений запишем передаточную функцию регулятора компенсирующего три постоянных времени

$$W_p(p) = \frac{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \cdot (T_3 p + 1)}{T_u p}. \quad (5.29)$$

Раскрывая скобки и проводя по членное деление, получим:

$$W_p(p) = \frac{T_1 T_2 T_3}{T_u} p^2 + \frac{T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3}{T_u} p + \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_u} + \frac{1}{T_u p} \quad (5.30)$$

Одно из слагаемых в законе регулирования содержит дифференцирующее звено второго порядка.

При подаче на вход такого звена с передаточной функцией  $W(p) = kp^2$  высокочастотной помехи  $z = A \sin \omega t$  на выходе после двукратного дифференцирования получим:

$$Y = -K \cdot A \omega^2 \sin \omega t$$

Амплитуда выходного сигнала возрастает пропорционально квадрату его частоты. Если на вход системы действует помеха с частотой 10 кГц, то она усилится после прохождения такого звена в 100000000 раз и подавит полезную информацию.

### 5.3. Синтез систем методом последовательной коррекции с подчиненным регулированием координат

Пусть передаточная функция объекта имеет вид [6]:

$$W_o(p) = \frac{k_1 k_2 \dots k_n e^{-\tau p}}{\prod_{i=1}^n (T_i p + 1)}, \quad (5.31)$$

где  $\tau$  - постоянное запаздывание,  $T_i$  - постоянные времени элементов объекта регулирования, расположенные в порядке убывания по значению,  $k_1 k_2 \dots k_n$  - коэффициенты передачи элементов объекта регулирования.

Предположим, что передаточная функция регулятора задана в виде

$$W_p(p) = \frac{\prod_{j=1}^l (T_j p + 1)}{k'_1 k'_2 \dots k'_n T_0 p}, \quad (5.32)$$

где  $l$  - число больших и средних постоянных времени. Для физически реализуемых регуляторов  $l \leq 2$ , т. е. в качестве наиболее сложного регулятора можно использовать ПИД-регулятор.

Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 \dots k_n e^{-\tau p} \prod_{j=1}^l (T_j p + 1)}{k'_1 k'_2 \dots k'_n T_0 p \prod_{i=1}^n (T_i p + 1)} \quad (5.33)$$

Если выбрать параметры настройки регулятора из условия компенсации наибольших постоянных времени объекта  $k_i = k'_i, T_i = T_j$  исходная передаточная функция (5.33) существенно видоизменится:



$$W(p) = \frac{e^{-\tau p}}{T_0 p \prod_{j=1}^n (T_j p + 1)} \quad (5.34)$$

Исключение из передаточной функции разомкнутой системы звеньев с большими и средними постоянными времени повышает быстродействие системы, а введение интегрирующего звена с постоянной времени  $T_0$  повышает точность регулирования.

Выбирая  $T_0$  из условия  $T_0 > T_l$ , где  $T_l$ , как было принято, является наибольшей из оставшихся некомпенсированных постоянных времени  $T_i$  выражение (5.34) можно упростить и приближенно записать в следующем виде:

$$W(p) = \frac{1}{T_0 p (T_\mu p + 1)}, \quad (5.35)$$

где  $T_\mu = \tau + \sum_l^n T_i$  - суммарная некомпенсированная постоянная времени объекта регулирования, эквивалентная по потере запаса по фазе на частоте среза всем его реальным некомпенсированным постоянным [6].

При этом передаточная функция замкнутой системы будет иметь вид

$$W_z(p) = \frac{1}{T_0 p (T_\mu p + 1) + 1}, \quad (5.36)$$

а корни характеристического уравнения равны:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T_\mu} \pm \sqrt{\frac{1}{4T_\mu^2} - \frac{1}{T_0 T_\mu}} = \frac{1}{T_0} \left( -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a} \right), \quad (5.37)$$

где  $a = \frac{T_0}{T_\mu}$  - отношение постоянных времени.

Зная выражение для передаточной функции замкнутой системы и корней характеристического уравнения нетрудно записать выражение для переходной характеристики замкнутой системы

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2T_\mu}} \left( \cos(\omega t + \frac{a}{\sqrt{4a - a^2}} \sin(\omega t)) \right), \quad (5.38)$$

где  $\omega = \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2aT_\mu}$  - собственная частота замкнутой системы.

При  $a < 4$  переходный процесс в замкнутой системе будет колебательным, причем время переходного процесса будет определяться суммарной не компенсируемой постоянной  $T_\mu$  из следующего выражения

$$t_p = (6 \div 8)T_\mu.$$

Изложенный инженерный метод синтеза широко используется в практике проектирования систем регулирования так как практически на основе простейших расчетов позволяет по заданной передаточной функции объекта регулирования найти передаточные функции регулятора, разомкнутой и замкнутой систем регулирования, а также оценить качество системы по переходным характеристикам типового колебательного звена.

Если в составе объекта регулирования имеются больше двух постоянных времени подлежащих компенсации, то в этом случае прибегают к введению подчиненных контуров регулирования.

Допустим, необходимо регулировать выходную координату объекта регулирования, содержащего три больших постоянных времени  $T_1, T_2, T_3$  и три обобщенных координаты  $x_1, x_2, x_3$  (рис. 5.2.).

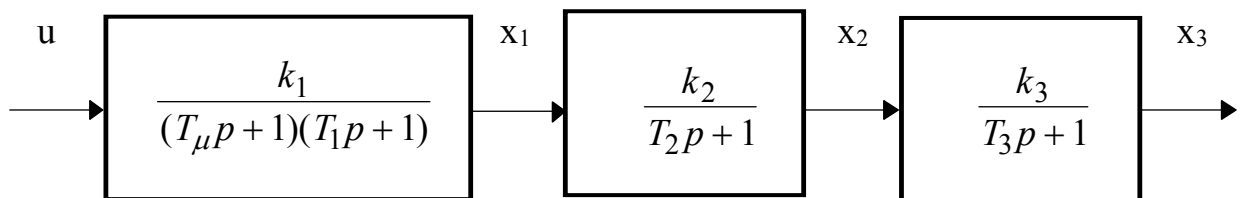


Рис. 5.2.

Введем вспомогательные контуры регулирования внутренних координат таким образом, чтобы в каждом контуре оказалась только одна компенсируемая постоянная времени, как показано на рис. 5.3.

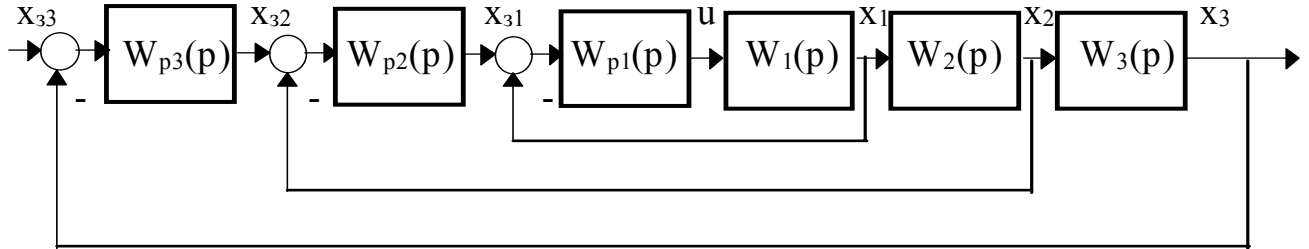


Рис. 5.3

Проведем вначале синтез внутреннего контура регулирования для переменной  $X_1$ .

Для первого контура желаемая передаточная функция разомкнутого контура в соответствии с (5.35) будет выглядеть:

$$W_{11}(p) = \frac{1}{a_1 T_\mu p (T_\mu p + 1)}. \quad (5.39)$$

Передаточную функцию регулятора найдем из условия

$$W_{p1}(p)W_{1p} = W_{11}(p), \quad (5.40)$$

где  $W_{1p}(p) = \frac{k_1}{(T_\mu p + 1)(T_1 p + 1)}$  передаточная функция первого звена объекта рис.

5.2.. Тогда

$$W_{p1}(p) = \frac{W_{11}(p)}{W_{1p}(p)} = \frac{T_1 p + 1}{k_1 a_1 T_\mu p} = \frac{T_1}{T_{u1}} + \frac{1}{T_{u1} p}. \quad (5.41)$$

В результате синтеза получен ПИ - регулятор с постоянной интегрирования  $T_{u1} = k_1 a_1 T_\mu$ .

На основании (5.39) и (5.41) с учетом (5.36) найдем передаточную функцию замкнутой системы

$$W_{z1}(p) = \frac{1}{a_1 T_\mu p (T_\mu p + 1) + 1}. \quad (5.42)$$

Если выбрать  $a_1$  таким образом, чтобы внутренний контур представлял собой высокодемпфированное звено с невысоким показателем колебательности, то выражение (5.41) можно упростить, пренебрегая членами второго порядка малости

$$W_{z1}(p) \approx \frac{1}{a_1 T_\mu p + 1}. \quad (5.43)$$

С учетом этого допущения структурная схема рис. 5.3 преобразуется к виду

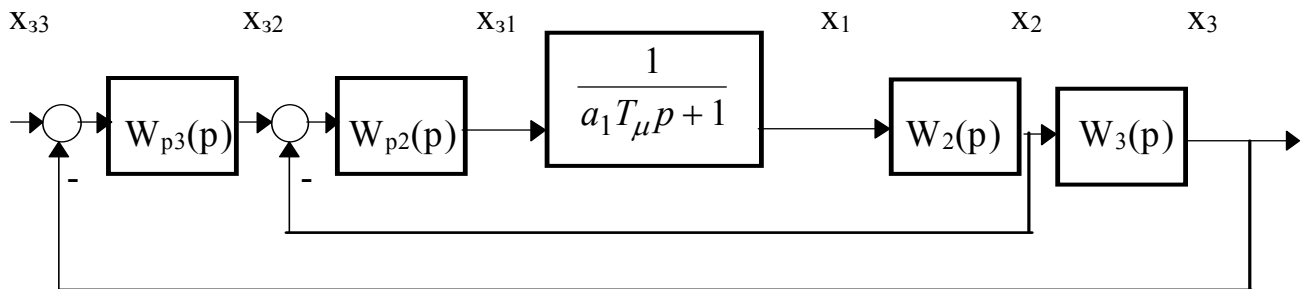


Рис. 5.4.

В результате введения первого контура регулирования из второго контура исключена большая постоянная  $T_1$ , а не компенсируемая постоянная времени принимает значение  $T_{\mu 2} = a_1 T_\mu$ , т. е. увеличивается в  $a_1$  раз.

Проводя синтез второго контура регулирования можно записать выражения передаточных функций.

Желаемая передаточная функция разомкнутого второго контура

$$W_{21}(p) = \frac{1}{a_2 T_{\mu 2} p (T_{\mu 2} p + 1)} = \frac{1}{a_1 a_2 T_\mu p (a_1 T_\mu p + 1)}. \quad (5.44)$$

Передаточная функция регулятора

$$W_{p2}(p) = \frac{T_2 p + 1}{k_2 a_1 a_2 T_\mu p} = \frac{T_2}{T_{u2}} + \frac{1}{T_{u2}}, \quad (5.45)$$

где  $T_{u2} = k_2 a_1 a_2 T_\mu$ .

Вновь получена передаточная функция ПИ - регулятора.

Передаточная функция замкнутого второго контура

$$W_{z2}(p) = \frac{1}{a_1 a_2 T_\mu p (a_1 T_\mu p + 1) + 1} \approx \frac{1}{a_1 a_2 T_\mu p + 1}. \quad (5.46)$$

Структурная схема преобразуется к виду рис. 5.4.

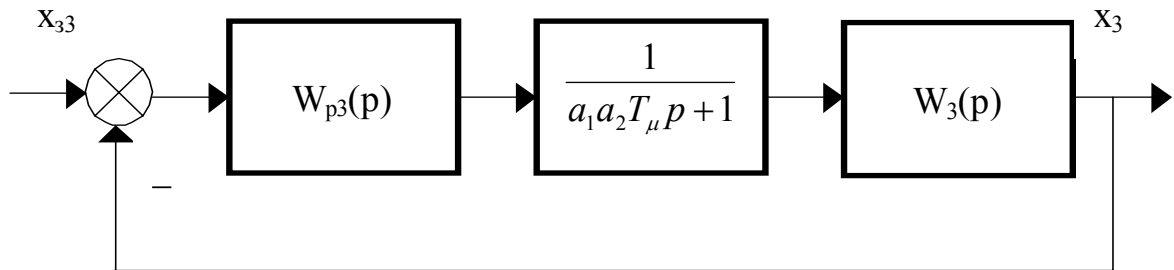


Рис. 5.5.

Сравнивая рис. 5.2 с рис. 5.5, можно установить, что в результате введения двух контуров регулирования, исключено влияние на динамику системы больших постоянных времени  $T_1, T_2$ . Вместе с тем увеличилась суммарная не компенсируемая постоянная контура, оценка которой составляет  $T_{\mu3} = a_1 a_2 T_\mu$ . Желаемая передаточная функция разомкнутой системы при этом запишется в виде

$$W_{21}(p) = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 T_\mu p (a_1 a_2 T_\mu p + 1)}. \quad (5.47)$$

Передаточная функция регулятора третьего контура

$$W_{p2}(p) = \frac{T_3 p + 1}{k_3 a_1 a_2 a_3 T_\mu p} = \frac{T_3}{T_{u3}} + \frac{1}{T_{u3}}, \quad (5.48)$$

где  $T_{u3} = k_3 a_1 a_2 a_3 T_\mu$  - постоянная времени ПИ - регулятора.

С учетом принятых допущений передаточная функция замкнутого внешнего контура регулирования приближенно соответствует колебательному звену с передаточной функцией

$$W_{z3}(p) = \frac{1}{a_1 a_2 a_3 T_\mu p (a_1 a_2 T_\mu p + 1) + 1}. \quad (5.49)$$

Введение вспомогательных, внутренних контуров регулирования имеет целью формирование благоприятной передаточной функции замкнутой системы, при использовании для последовательной коррекции физически реализуемых

простых регуляторов. Вспомогательные контуры называют подчиненными контурами регулирования, а структура, показанная на рис. 5.2, представляет структуру подчиненного регулирования обобщенных координат объекта.

Динамические показатели качества регулирования каждой обобщенной координаты определяются соотношением постоянных  $a_i$ . На практике принимают  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 2$ , такая настройка называется настройкой на *технический оптимум* или *оптимум по модулю*. Она обеспечивает минимальное время регулирования  $t_p = 4,7T_\mu$  при незначительном перерегулировании  $\sigma = 4,3\%$ .

При настройке всех контуров на технический оптимум ( $a_i = 2$ ) передаточную функцию  $i$ -го разомкнутого контура с помощью (5.39) и (5.47) можно записать так

$$W_{pazi}(p) = \frac{1}{2^i T_\mu p (2^{i-1} T_\mu p + 1)}. \quad (5.50)$$

То же для замкнутого контура

$$W_{pazi}(p) = \frac{1}{2^i T_\mu p (2^{i-1} T_\mu p + 1) + 1}. \quad (5.51)$$

В случаях, когда требуется более высокая точность регулирования используют ПИД - регуляторы обеспечивающие настройку на *симметричный оптимум*. При такой настройке желаемую передаточную функцию разомкнутого контура записывают в виде

$$W(p) = \frac{4T_\mu p + 1}{4T_\mu p} \frac{1}{2T_\mu p (T_\mu p + 1)}. \quad (5.52)$$

Формула (5.52) записана для первого внутреннего контура и может быть применена для следующих контуров, если в нее подставлять соответствующие значения  $T_{\mu i} = 2^{i-1} T_\mu$ . Астатизм системы в этом случае повышается до двух, но при этом перерегулирование возрастает до 56 %.

#### 5.4. Синтез регуляторов при модальном управлении

Синтеза параметрических регуляторов на основе метода подчиненного регулирования, или метода логарифмических частотных характеристик применимы в первую очередь для одномерных объектов, или предполагают заранее заданную последовательную структуру объекта при скалярном управлении. При векторном управлении многомерным объектом использовать данные методы синтеза затруднительно. В этом случае более предпочтительным является использование модального управления (от латинского слова *moda* - корень).

В соответствии с теорией модального управления для всякого полностью управляемого объекта

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (5.53)$$

всегда можно найти управление

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{x}, \quad (5.54)$$

такое, что корни (моды) характеристического полинома замкнутой системы

$$D(p) = \det(\mathbf{I}p - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^T) \quad (5.55)$$

имеют наперед заданные значения  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ,  $\mathbf{I}$  - единичная матрица.

Корни характеристического уравнения можно задать, используя корневые критерии качества.

Докажем это утверждение, для этого подставим (5.54) в (5.53)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^T)\mathbf{x}. \quad (5.56)$$

Подвергнем последнее уравнение преобразованию Лапласа

$$\mathbf{I}p\mathbf{x}(p) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{C}^T)\mathbf{x}(p). \quad (5.57)$$

Приведя подобные члены, получим:

$$(\mathbf{I}p - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^T)\mathbf{x}(p) = 0. \quad (5.58)$$





где

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{n-2} & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ -d_0 & -d_1 & \dots & -d_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{I}_{n-2}$  - единичная матрица размера  $(n-2) \times (n-2)$ ,  $d_0, d_1, \dots, d_{n-1}$  - коэффициенты характеристического полинома объекта, задаваемого выражением:

$$D(p) = p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \dots + d_1p + d_0. \quad (5.63)$$

Переход от переменной  $x$  к  $\tilde{x}$  осуществляется преобразованием

$$\mathbf{x} = \Psi^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.64)$$

где  $\Psi = (\tilde{b} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{b} \dots \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} \tilde{b}) (b \mathbf{A} b \dots \mathbf{A}^{n-1} b)^{-1}$

Из структуры матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}$  следует, что уравнение системы в канонически управляемой форме (5.62) может быть представлено в символической форме как:

$$D(p) \tilde{x}_1(p) = u(p). \quad (5.65)$$

Сравнивая это уравнение и заданный полином с известными корнями характеристического уравнения  $p_i$

$$\prod_{p=1}^n (p - p_i) = p^n + d^* p^{n-1} + \dots + d_1^* p + d_0^* = 0 \quad (5.66)$$

получим

$$D(p) \tilde{x}_1(p) - u(p) = D^*(p) \tilde{x}_1(p). \quad (5.67)$$

Разрешая последнее уравнение, относительно  $u(p)$  будем иметь

$$u(p) = [D(p) - D^*(p)] \tilde{x}_1(p). \quad (5.68)$$

Раскрывая выражение, стоящее в квадратных скобках (5.68), найдем коэффициенты матрицы управления  $\tilde{\mathbf{C}}$

$$U(p) = -(\tilde{c}_n p^n + \tilde{c}_{n-1} p^{n-1} + \dots + \tilde{c}_2 p + \tilde{c}_1) \tilde{x}_1, \quad (5.69)$$

где  $c_i = d_i^* - d_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Принимая во внимание, что  $p \tilde{x}_i = \tilde{x}_{i+1}$  получим

$$u = -\sum_{i=1}^n \check{c}_i \check{x}_i = -\check{\mathbf{C}}^T \check{\mathbf{x}}, \quad (5.70)$$

где  $\check{\mathbf{C}}$  -  $n$ - мерный вектор чисел.

Возвращаясь к исходным переменным, найдем исходный вектор  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}^T = \check{\mathbf{C}}^T \Psi. \quad (5.71)$$

Рассмотрим пример вычисления матрицы  $\mathbf{C}$  при модальном управлении. Пусть имеется объект со структурной схемой рис. 5.6.

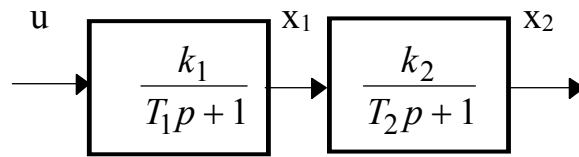


Рис. 5.6.

и заданными корнями характеристического уравнения замкнутой системы  $p_i$ .

В развернутом виде уравнения (5.53) движения объекта можно записать в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{T_1} x_1 + \frac{k_1}{T_1} u; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{k_2}{T_2} x_1 - \frac{1}{T_2} x_2, \end{aligned}$$

а уравнение для скалярного управления:

$$u = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  будут выглядеть следующим образом

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{k_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{T_1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = (c_1 \quad c_2).$$

Характеристическое уравнение системы найдем из уравнения (5.59), подставляя сюда заданные матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$

$$\begin{vmatrix} p + \frac{1}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} c_1 & -\frac{k_1}{T_1} c_2 \\ -\frac{k_2}{T_2} & p + \frac{1}{T_2} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$p^2 + \left( \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} c_1 \right) p + \frac{1}{T_2} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} c_1 \right) - \frac{k_1 k_2}{T_1 T_2} c_2 = 0. \quad (5.72)$$

Заданное характеристическое уравнение имеет вид:

$$(p - p_1)(p - p_2) = 0,$$

или

$$p^2 - (p_1 + p_2)p + p_1 p_2 = 0. \quad (5.73)$$

Приравнявая одноименные коэффициенты при характеристических полиномах (5.72) и (5.73) получим систему уравнений для вычисления коэффициентов  $c_1, c_2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} - \frac{k_1}{T_2} c_1 &= -(p_1 + p_2) \\ \frac{1}{T_2} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{k_1}{T_1} c_1 - \frac{k_1 k_2}{T_1} c_2 \right) &= p_1 p_2 \end{aligned}$$

### 5.5. Аналитическое конструирование регуляторов

Впервые задача аналитического конструирования регуляторов (АКОР) решена А.М. Летовым в 1960 году. В зарубежных источниках задача АКОР называется задачей линейно-квадратичного управления или оптимизации.

Исходная постановка задачи АКОР формулируется следующим образом [4]: для объекта управления, движение которого в первом приближении описывается уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}; \quad x(0) = x_0, \quad (5.74)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  заданные матрицы размеров  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно, найти матрицу  $\mathbf{C}$ , размером  $m \times n$  уравнения регулятора

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^T \mathbf{x} \quad (5.75)$$

такую, чтобы на асимптотически устойчивых движениях системы задаваемой уравнениями (5.74) и (5.75), создаваемых произвольными начальными условиями  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  минимизировать интегральный квадратичный критерий (функционал)

$$I = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u}) dt. \quad (5.76)$$

где,  $\mathbf{Q}$ - заданная положительно определенная матрица размером  $n \times n$ .

Доказательство единственности и существования управления (5.75), осуществляется в рамках теории оптимального управления [4] и нами рассматриваться не будет

Рассмотрим процедуру АКОР которая состоит из следующих операций:

1. Составляется векторно-матричное алгебраическое уравнение Риккати

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0. \quad (5.77)$$

2. Осуществляется его решение, т. е. определяются неизвестные коэффициенты матрицы  $\mathbf{P}$ .

3. Вычисляется матрица  $\mathbf{C}$  по формуле

$$\mathbf{C} = -\mathbf{P}\mathbf{B}. \quad (5.78)$$

Отметим подобие законов управления при модальном и линейно-квадратичном управлении. Однако в первом случае искомая матрица  $\mathbf{C}$  обеспечивает заранее заданное расположение корней характеристического уравнения, а во втором случае подобная ей матрица обеспечивает минимум интегрального квадратичного критерия (5.76).

В качестве примера рассмотрим процедуру АКОР для системы задаваемой структурой рис. 5.7.

Структура системы регулирования показана на рисунке 5.7.

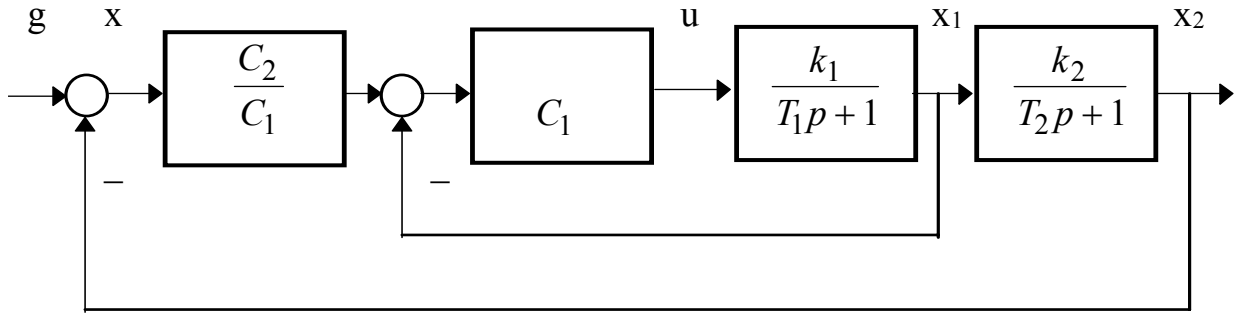


Рис. 5.7.

1. Для составления уравнения Риккати (5.77) примем  $Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}$  и

найдем произведение матриц  $\mathbf{P}\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^T\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$

$$\mathbf{P}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21} & p_{12}a_{22} \\ p_{12}a_{11} + p_{22}a_{21} & p_{22}a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}p_{11} + a_{21}p_{12} & a_{11}p_{12} + a_{21}p_{22} \\ a_{22}p_{12} & a_{22}p_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} = b^2 \begin{pmatrix} p_{11}^2 & p_{11}p_{12} \\ p_{11}p_{12} & p_{12}^2 \end{pmatrix}.$$

2. Осуществляя сложение найденных матриц, в уравнении Риккати получим систему из трех алгебраических уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов матрицы  $\mathbf{P}$

$$\begin{aligned} 2(p_{11}a_{11} + p_{12}a_{21}) - b^2 p_{11}^2 + q_{11} &= 0; \\ p_{12}(a_{11} + a_{21} + a_{22} - b^2 p_{11}) + q_{12} &= 0; \\ 2p_{22}a_{22} - b^2 p_{12}^2 + q_{22} &= 0. \end{aligned}$$

3. Вычисляем матрицу управления  $\mathbf{C}$  по формуле (5.78)

$$\mathbf{C} = -\mathbf{P}\mathbf{B} = -\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = -b(p_{11} \quad p_{12}).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. - М.: Высшая школа, 1986. – 262 с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1987. – 767 с.
3. Бронштейн И.М., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
4. Егоров К.В. Основы теории автоматического регулирования. –М.: Энергия, 1967.- 432 с.
5. Изерман Р. Цифровые системы управления. – М.: Мир, 1984. – 541 с.
6. Ключев В.И. Теория электропривода. – М.: Энергоатомиздат, 1985.–500 с.
7. Основы теории автоматических систем/ Под ред. В.С. Пугачева.-М.: Наука, 1974. –432 с.
8. Попов Е.П. Автоматическое регулирование и управление. - М.: Физматгиз, 1962.-273 с.
9. Теория автоматического управления/ Под ред. А.А. Воронова. М.: Высшая школа.-1987, ч. 1, 376 с.; ч. 2, 504 с.; ч. 3, 328 с.
10. Теория автоматического управления/ Под ред. А.В. Нетушила. М.: Высшая школа.-1986, ч. 1, 424 с.; ч. 2, 430 с.
11. Ту Ю. Современная теория управления. - М.: Машиностроение, 1976. – 472 с.